DAVID BESSIS

MATHEMATICA

UN'AVVENTURA ALLA RICERCA DI NOI STESSI

NERI POZZA
I COLIBRÍ

Ladri di Biblioteche

NERI POZZA

I COLIBRÍ

DAVID BESSIS

MATHEMATICA

Un’avventura alla ricerca di noi stessi

traduzione dal francese di
Raffaele Cardone

NERI POZZA EDITORE

Titolo originale:
Mathematica. Une aventure au cœur de nous-mêmes
© 2022 Éditions du Seuil
Illustrazioni di Éléonore Lamoglia

© 2023 Neri Pozza Editore, Vicenza
ISBN 978-88-545-2703-4

www.neripozza.it

Sommario

1. Tre segreti
2. Il lato giusto del cucchiaio
3. Con la forza del pensiero
4. La vera magia
5. I gesti invisibili
6. Il rifiuto di leggere
7. La postura del bambino piccolo
8. La teoria del tatto
9. Qualcosa che non va
10. Imparare a vedere
11. La palla e la mazza
12. I trucchi non esistono
13. Passare per stupidi
14. Un’arte marziale
15. Zero paura
16. Iperlucido
17. Controllare l’universo
18. L’elefante nella stanza
19. Astratto e malleabile
20. Il risveglio matematico

Epilogo

Note. Per andare oltre

Ringraziamenti

Crediti delle illustrazioni

Dare ascolto al Sognatore che è in noi significa comunicare con noi stessi, contro le potenti barriere che vorrebbero proibircelo in ogni modo.

Alexander Grothendieck

1. *Tre segreti*

Questo libro aspira a cambiare il vostro modo di vedere il mondo.

Parte da un'avventura personale, una lunga avventura che ha trasformato la mia percezione del corpo e mi ha dotato di poteri magici. Ma non è solo un'avventura personale. È un'avventura collettiva, una delle piú antiche e potenti che esistano. È iniziata nella preistoria da una manciata di esseri umani, e continua ancora oggi a trasformare la nostra civiltà, il nostro linguaggio e il nostro pensiero.

Quanti tra noi sentono vivere e crescere la matematica dentro di sé? Non lo so. So solo che siamo una piccola minoranza e la nostra storia è ancora sconosciuta.

L'avventura matematica ha fama di essere inaccessibile, come se si dovesse appartenere a un'élite, aver ricevuto un dono speciale. Anche se i piú grandi matematici ci hanno tenuto a scrivere che non è vero. A dire, come vedremo, di essere arrivati alle loro conquiste attraverso facoltà umane comuni, con i loro dubbi e con le loro debolezze, le loro curiosità e la loro immaginazione.

Nessuno però ha voluto crederci. Forse non hanno saputo raccontare la propria storia con parole abbastanza semplici, o forse hanno sottovalutato il potere del mito che stavano mettendo in discussione, uno degli ultimi grandi miti umani: il mito dell'intelligenza. Le scienze matematiche plasmano il mondo. Sono uno strumento di potere e di dominio. Ma per coloro che la vivono, l'avventura matematica è soprattutto un'esperienza interiore, una ricerca dei sensi e dello spirito.

Questa esperienza ha ben poco a che fare con tutto ciò che ci insegnano a scuola. Per certi versi è una forma di chiaroveggenza, uno stato di estrema lucidità di pensiero; per altri, è quasi l'estensione di quei processi misteriosi che, nella prima infanzia, ci hanno permesso di imparare a parlare. Capire la

matematica è seguire un percorso segreto che ci riporta alla plasticità della nostra mente infantile: significa imparare a riattivarla e a prendere confidenza con essa; in altre parole, a farla vivere. Questo percorso intellettuale è straordinariamente vicino a quello che compiamo nella vita di tutti i giorni. Ma il suo accesso è nascosto, celato dietro le nostre abitudini, dietro le nostre paure e inibizioni.

Vorrei aiutarvi a ritrovare questo percorso.

Qualcosa di misterioso

«Non ho doni particolari, sono solo appassionatamente curioso»[1].

Quando avevo quindici anni, detestavo questa affermazione di Einstein. Mi suonava falsa, in malafede, come quando le top model vengono a dirci che ciò che conta è la bellezza interiore. Davvero vogliamo ascoltare simili stupidaggini?

In realtà, il messaggio principale di questo libro è proprio che dobbiamo prendere sul serio le parole di Einstein, per quanto sia difficile farlo. Einstein non ha certo fama di essere stato uno stupido, e nemmeno un bugiardo compulsivo. Chiunque vi dirà che la teoria della relatività è un grande contributo al pensiero umano. Quindi, ciò che Einstein ha detto e scritto dovrebbe meritare a priori la nostra attenzione. Ma nel momento in cui sembra suggerire che chiunque possa accedere a una creatività come la sua, che si tratta solo di mettersi in una prospettiva leggermente differente, alla portata di tutti, la nostra reazione istintiva è quella di non prenderlo sul serio. Il povero vecchio non sa cosa sta dicendo. O, peggio, sciorina falsa modestia, lo dice solo per mettersi in mostra.

Il problema è che finché ci rifiutiamo di prendere sul serio la frase di Einstein, ci priviamo della possibilità di procedere in un ragionamento che merita di essere approfondito.

La frase di Einstein è oggettivamente intrigante, ma non dice molto. Seppur vera, che ce ne facciamo? Come può esserci utile? Senza informazioni particolari, senza dettagli concreti né consigli pratici, è difficile capire quale lezione trarne.

Al tempo stesso è incredibile che nessuno abbia avuto la presenza di spirito di rispondergli: «Albert, è molto interessante quello che hai appena detto, ma ci piacerebbe saperne di piú. Che ne dici di spiegarcelo?

Vogliamo conoscere i dettagli nascosti, capire come lo metti in pratica. Passa a prendere un caffè! O magari preferisci una bella passeggiata nel bosco? Raccontaci tutto, abbiamo un sacco di domande da farti…».

Le prime domande che avremmo voluto fare sono ovviamente quelle piú sciocche:

1. *Da dove viene la curiosità di Einstein?*

Conosco veramente poche persone curiose al punto da chiudersi in una stanza per meditare su problemi di fisica teorica. Ma qualcuna ne conosco, e dicono tutte la stessa cosa: se si ha voglia di chiudersi in una stanza in compagnia di problemi di fisica teorica è senz'altro per un'ambizione scientifica, ma anche e soprattutto per puro piacere.

Tutt'a un tratto la domanda diventa: *come fa Einstein a trarre piacere dalle questioni della fisica?*

2. *Come fa Einstein a non scoraggiarsi?*

Essere *appassionatamente* curiosi vuol dire avere la capacità di interessarsi alle cose con un impegno incrollabile, con un'intensità e una tenacia fuori del comune. Einstein aveva evidentemente un segreto per non desistere là dove gli altri rinunciavano. Qual era questo segreto?

La mia pratica di ricerca matematica ad alto livello mi ha insegnato una cosa essenziale: quando ci troviamo chiusi in una stanza alle prese con un problema difficile, ci viene un unico desiderio – la fuga.

Affrontare la vera difficoltà, toccare i limiti della propria intelligenza, inciampare, annaspare per mesi, sentirsi troppo stupidi per capire e non avere idea di come uscirne, è semplicemente terrificante.

Einstein aveva trovato un modo per domare la sua paura e resistere all'istinto di fuga. Qual era questo modo?

3. *Quando Einstein si chiude in una stanza con un problema, cosa succede esattamente?*

In altre parole: *che ne fa Einstein del problema? Come se lo rigira? Da che parte lo prende perché ceda alla sua indagine, perché si faccia esplorare?*

Può sembrare assurdo usare un linguaggio cosí allusivo, ma siamo onesti: vogliamo i dettagli piccanti. Vogliamo sapere cosa succedeva veramente nella testa di Einstein. Vogliamo sapere come faceva *concretamente*. Vogliamo conoscere la sua tecnica, quell'abilità segreta che funzionava in tutte le occasioni.

Sappiamo che la creatività intellettuale non dipende solo da quanto intensamente ci si applica. Sappiamo che deve esserci per forza qualcos'altro, una sorta di fluido magico, qualcosa di misterioso che non ci hanno mai insegnato a scuola.

Se Einstein si fosse preso la briga di illustrarci il metodo per arrivare a grandi scoperte scientifiche, il suo contributo all'umanità avrebbe superato di gran lunga il suo lavoro nel campo della fisica. Come dice il proverbio, è meglio insegnare a pescare che regalare un pesce.

Quelle domande non sono mai state poste a Einstein. E non ci sarà piú occasione. Albert Einstein morí il 18 aprile 1955 al Princeton University Hospital. Il medico che eseguí l'autopsia era cosí curioso di scoprire i suoi segreti che ne rimosse il cervello, senza il consenso della famiglia, e lo tagliò in migliaia di fettine.

Non gli serví granché.

Il metodo

Ma la questione va ben oltre Einstein. Ce la poniamo da secoli. Riguarda le nostre credenze, le nostre idee sbagliate sull'intelligenza e la creatività intellettuale e i limiti imposti da queste credenze.

La principale difficoltà nel comprendere il lavoro di Einstein è il formalismo matematico con il quale egli stesso aveva piú di un problema, come confessò una volta a una studentessa che gli chiedeva consiglio: «Non si preoccupi delle sue difficoltà in matematica, le posso assicurare che le mie sono di gran lunga peggiori»[2].

Quattrocento anni fa, il piú grande matematico del tempo raccontò la sua vita in un libro che è diventato famoso. Fin dalle prime pagine, il suo messaggio è molto chiaro, e può essere cosí riassunto: «Non sono piú intelligente degli altri. Ho solo avuto la fortuna di scoprire un metodo magico che mi ha permesso di diventare piú forte di tutti. Vi spiegherò come ho fatto».

La stessa reazione istintiva che ci impedisce di prendere sul serio l'affermazione di Einstein ci impedisce anche di ascoltare ciò che questo matematico (Cartesio) sta cercando di dirci, e ci impedisce di mettere il suo libro (*Discorso sul metodo*) nello scaffale dove dovrebbe stare: quello della crescita personale.

L’opinione corrente è che non esiste un metodo per diventare un grande matematico, cosí come non esiste un metodo per dimagrire mangiando troppo o per diventare ricchi lavorando da casa un paio d’ore al giorno.

Poco importa che Cartesio ci dica esattamente il contrario.

Tre idee false

Riprenderemo il *Discorso sul metodo* nel capitolo 14, ma per capire ciò che Einstein e Cartesio cercavano di dirci, dobbiamo sbarazzarci di tre luoghi comuni sulla matematica:

1. Per fare matematica bisogna pensare in maniera logica.
2. Alcune persone sono per natura a proprio agio con i numeri e altre hanno un talento naturale per la geometria. Purtroppo, la stragrande maggioranza di noi non capisce letteralmente niente di matematica, e non possiamo farci nulla.
3. I grandi matematici sono nati con un cervello strutturalmente diverso dal nostro.

Sul primo di questi preconcetti, tanto vale essere chiari: no, i matematici non pensano in modo logico. Nessuno pensa in modo logico. È perfino rigorosamente impossibile pensare in modo logico. La logica non serve assolutamente a pensare. Serve a tutt’altro, vedremo a cosa.

Il secondo luogo comune è il piú nocivo. Ci blocca e ci rende fatalisti. È riuscito a convincere una buona metà dell’umanità che la matematica sia una terra straniera e ostile. Impone a ciascuno di noi, compresi i piú «capaci», un limite irraggiungibile, segnato dal livello di intuizione matematica di cui ciascuno di noi sarebbe «naturalmente» dotato.

Il terzo luogo comune è una semplice variazione sul tema: per essere Einstein o Cartesio, si deve nascere cosí, non lo si può diventare. E quando Einstein e Cartesio ci dicono il contrario, in realtà si prendono gioco di noi.

Questa prospettiva, secondo la quale non saremmo in grado di «diventare» forti in matematica, è sbagliata, ma parte da una verità essenziale: il potere magico dei matematici non è la logica ma l’intuizione.

Costruire il proprio intuito

Einstein ha parlato molto dell'importanza dell'intuizione nelle sue scoperte. Era molto serio quando diceva: «Credo nelle intuizioni e nelle ispirazioni»[3]. Quanto ai matematici, sanno molto bene che ci sono due differenti versioni della matematica.

La versione ufficiale si trova nei libri di matematica, dove è esposta in modo logico e strutturato, con un linguaggio ermetico che si serve di simboli indecifrabili.

La versione segreta si trova nella mente dei matematici e si chiama *intuizione matematica*. È fatta di rappresentazioni mentali e sensazioni astratte, spesso visive, che i matematici percepiscono come evidenti e che per loro sono fonte di piacere. Ma quando si tratta di condividere queste evidenze con il resto del mondo, la faccenda diventa imbarazzante. Ciò che era cosí ovvio, improvvisamente lo è molto meno.

Per trascrivere le idee, i matematici hanno dovuto inventare un linguaggio ermetico e dei simboli indecifrabili, cosí come i musicisti hanno dovuto inventare la notazione musicale ermetica per trascrivere le loro composizioni. Solo che i musicisti hanno un enorme vantaggio pratico: gli basta semplicemente suonare la propria musica perché tutti capiscano immediatamente di cosa si tratta, senza alcun bisogno di dover decifrare la partitura.

Il grande problema dei matematici è che non hanno questa possibilità. Nella loro testa, le idee sono brillanti, semplici e potenti. Sulla carta, diventano mediocri e stentate. La loro maledizione è quella di poter *suonare* la matematica solo nella propria testa.

Se per introdurre i bambini alla musica gli insegnassimo a decifrare gli spartiti di Mozart o di Michael Jackson, senza avergli mai fatto sentire una nota, la musica sarebbe universalmente odiata come lo è la matematica.

L'intuizione è il senso della matematica. Senza intuizione, la matematica non significa letteralmente nulla. Non per questo bisogna concludere che, se non si capisce niente di matematica, la situazione non possa cambiare.

L'errore è credere che la nostra intuizione matematica sia un parametro statico, un limite insuperabile. Tuttavia, l'intuizione che abbiamo degli oggetti matematici non è innata. Non è inalterabile. Possiamo costruirla, farla crescere giorno dopo giorno, a condizione di seguire il metodo giusto.

I matematici sanno bene che la matematica ufficiale, quella che si trova nei libri, non racconta tutta la storia. Sanno che il vero problema è *capire*

quello che c'è nei libri, poterlo *vedere* e *sentire*.

Ciò che li occupa quotidianamente è dunque sviluppare la loro intuizione, renderla sempre piú ricca, piú chiara, piú efficace. Ben piú che le ricerche e le pubblicazioni ufficiali, l'intuizione di un matematico è di per sé la sua grande opera, il risultato di tutta una vita.

Questa straordinaria arte di *vedere*, *sentire*, *capire veramente* e trovare *evidente* ciò che il 99.9999%[4] dell'umanità considera astratto in modo assurdo e totalmente incomprensibile, è la grande arte dei matematici e il loro grande segreto. Solo chi l'ha praticata sa fin dove può portare quest'arte.

Ma come fanno? È l'argomento di questo libro.

Tre segreti dei matematici

1. *La pratica della matematica è un'attività fisica*. Per capire ciò che non capiamo, dobbiamo compiere dei silenziosi gesti interiori, invisibili ma indispensabili, che ci permetteranno di arricchire il nostro intuito e di sviluppare nuove rappresentazioni mentali piú profonde ed efficaci. È un'attività che ci migliora e ci appaga. Imparare a fare matematica è imparare a usare il proprio corpo. È come imparare a camminare, nuotare, ballare o andare in bicicletta. Queste abilità non sono innate, ma noi tutti abbiamo la capacità di apprenderle.

2. *C'è un metodo per diventare molto bravi in matematica*. Questo metodo non viene mai insegnato a scuola. In effetti, non assomiglia a nessun metodo scolastico e si allontana da tutti i principi dell'insegnamento tradizionale. Non persegue lo sforzo ma la facilità. Potrebbe essere paragonato a una tecnica di arrampicata, un'arte marziale, una forma di yoga o di meditazione. Ci insegna a superare le nostre paure, a dominare il nostro istinto di fuga di fronte all'ignoto e a trovare gusto nell'essere contraddetti. È un metodo per riprogrammare il nostro intuito. Come tale, non è solo un metodo per diventare molto bravi in matematica, ma anche un metodo per diventare molto intelligenti.

3. *Il cervello dei grandi matematici funziona allo stesso modo del nostro*. Probabilmente, come per tutte le capacità del corpo, la naturale inclinazione per la matematica non è distribuita equamente tra gli individui.

Ma queste differenze biologiche giocano un ruolo molto meno importante di quanto si pensi.

La distribuzione delle competenze matematiche è talmente disomogenea che l'ipotesi biologica non regge. Certo, alcune persone hanno un metabolismo neurale geneticamente piú efficiente, piú veloce e piú potente, il che, perché no, le renderebbe due volte piú portate per la matematica. Ma acquisire il giusto metodo, sviluppare i giusti riflessi mentali, adottare la giusta postura psicologica, significa diventare un miliardo di volte migliori in matematica.

La sconcertante disuguaglianza nelle capacità matematiche ha un'altra spiegazione molto piú semplice e convincente: il metodo per diventare molto bravi in matematica non viene mai insegnato. Ci si affida al caso. Si lascia che ognuno scopra frammenti del metodo per proprio conto e per un colpo di fortuna. Il piú delle volte non si scopre proprio nulla, perché alcuni punti essenziali del metodo sono sorprendenti e controintuitivi. È molto facile lasciarseli sfuggire.

Il cervello dei grandi matematici funziona proprio come il nostro. Ma la loro storia personale, il modo in cui sono entrati in contatto con il mondo, gli ha dato la possibilità di familiarizzare con il metodo fin dall'infanzia. Ci sono arrivati da soli, senza volerlo e senza sapere cosa stavano facendo, per i casi della vita.

Una tradizione orale

Molti matematici hanno raccontato di sentirsi degli autodidatti. Dato il ruolo della matematica nell'educazione scolastica, questa impressione sembra un paradosso.

Infatti, non sono veri autodidatti, nel senso che la scuola gli ha insegnato molte cose. Ma lo sono nel senso che le cose piú importanti non le hanno imparate a scuola.

Io sono uno di questi autodidatti paradossali. Ho imparato le basi della matematica formale a scuola. Allo stesso tempo, ho scoperto i rudimenti della matematica segreta senza che nessuno me li insegnasse.

Per un lungo periodo non mi sono reso conto della connessione tra i miei invisibili gesti mentali, ovvero l'abitudine di usare l'immaginazione in un modo molto particolare, e le mie capacità matematiche.

Vi parlerò piú avanti di come ho iniziato ad allenare l'immaginazione fin da bambino. Al principio erano giochi molto semplici e innocenti. Per esempio, mi muovevo con gli occhi chiusi, cercando di memorizzare la posizione dei mobili in casa mia. Cosa ha a che fare tutto questo con ciò che mi è stato insegnato a scuola?

Quando ho iniziato, non ero particolarmente bravo. Urtavo sempre contro le pareti. Non avevo idea che questo e altri giochi sempre piú difficili mi avrebbero permesso di sviluppare un'intuizione geometrica particolarmente efficace, pur partendo da facoltà comuni a tutti.

Questa intuizione è stata l'arma segreta della mia carriera matematica. Potevo vedere cose che nessun altro aveva mai visto e potevo risolvere problemi che nessun altro aveva potuto risolvere.

Avendola sentita crescere nel corso degli anni, so per certo che la mia forza matematica non era innata. So anche che le abitudini mentali che l'hanno resa possibile non mi sono mai state insegnate a scuola. Erano principalmente frutto del caso e della fortuna.

Solo molto piú tardi, parlando con altri matematici e matematiche e leggendo le testimonianze di quelli celebri, ho scoperto che la mia esperienza non era affatto unica.

Su un terreno contiguo al sapere ufficiale dei libri di matematica, i segreti dei matematici sono oggetto di una tradizione orale che si tramanda e si arricchisce di generazione in generazione: racconta ciò che nessuno osa scrivere nei libri perché non è serio, non è scienza, e assomiglia un po' troppo alle tecniche di crescita personale.

Tutta questa storia merita di essere raccontata con parole semplici e accessibili. Ci riguarda tutti, sia quelli negati in matematica sia quelli dotati, giovani e vecchi, umanisti e scienziati. Parla dei nostri punti di forza e di debolezza, dei nostri talenti nascosti e di ciò che siamo capaci di realizzare. Parla dell'intelligenza umana, della coscienza e del linguaggio. È la nostra storia comune.

L'avventura matematica è un'avventura intima, nascosta e silenziosa. Ma è un'avventura universale. Il suo vero soggetto è l'essere umano.

Nelle conversazioni private, quando nessuno li sta ascoltando, i matematici possono finalmente dirsi come stanno le cose.

Sí, la matematica fa paura. Sí, sembra incomprensibile. Sí, sembra che la sua essenza sia impossibile da cogliere. Eppure, esiste un modo per arrivarci.

2. *Il lato giusto del cucchiaio*

Mio figlio Aram ha un anno e sta imparando a mangiare con il cucchiaio. È inutile far finta di niente, è un disastro. In due minuti è riuscito a mettersi il purè nelle orecchie.

Cerco di aiutarlo. Gli riempio il cucchiaio e glielo porgo. E lui lo prende dalla parte sbagliata, quella con il purè. Gli spiego che dovrebbe prenderlo dalla parte opposta, dal manico, e gli mostro come fare. Ma lui insiste a mettere la mano sul lato del purè. In fin dei conti è abbastanza logico, visto che è attratto dal purè. Solo che non si fa cosí.

In ogni caso, non sono preoccupato. Ce la farà. Alla fine, tutti si rendono conto che c'è un lato giusto per afferrare il cucchiaio. Non ho mai sentito nessuno dire: «Il cucchiaio non fa per me. Non ho mai capito cosa ci si trovi di tanto interessante. Mi ha dato subito ai nervi e ho lasciato perdere».

L'umanità e il cucchiaio: una relazione importante. Nessuno odia il cucchiaio. Il cucchiaio non odia nessuno. È uno dei primi veri strumenti che incontriamo e che ci accompagna per tutta la vita.

All'inizio è misterioso e inaffidabile. Poi diventa familiare. In poco tempo lo usiamo senza pensarci, come la nostra mano. E in un certo senso è davvero come la nostra mano: il cervello interiorizza il cucchiaio, la sua funzione e le sue possibilità. Diventa un'estensione del corpo.

Una volta che sappiamo mangiare con un cucchiaio, troviamo la cosa semplice. Solo quando non lo sappiamo fare ci risulta difficile. Abbiamo imparato a usare il cucchiaio cosí bene che ci siamo dimenticati di aver dovuto imparare a farlo. Abbiamo dimenticato che non è stato facile.

La complessità del gesto diventa di nuovo evidente quando si osserva un bambino che ancora non è capace di eseguirlo. Il gesto richiede un'eccellente coordinazione motoria. Il semplice fatto di saper come

prendere un cucchiaio, e di tenerlo nel modo giusto, con la giusta angolazione, è già una capacità raffinata. Per non parlare del fatto che il modo giusto di tenere un cucchiaio dipende da cosa ci si vuole mangiare.

Da cinquant'anni siamo in grado di mandare razzi sulla luna, ma stiamo appena iniziando a programmare i robot perché siano capaci di usare un cucchiaio per prendere del purè. Per non parlare di usarlo per scavare la polpa di un kiwi, cosa molto piú difficile che raccogliere il purè.

Le cose serie

Il cucchiaio non è che l'inizio. Le cose serie iniziano dopo. Impariamo a mettere e ad allacciare le scarpe. Impariamo a lavarci i denti e a tagliarci le unghie. Impariamo ad andare in bicicletta e sui pattini a rotelle. Impariamo a sbucciare le cipolle e a fare il caffè. Impariamo a giocare con i Playmobil e a cucire un bottone. Impariamo a guidare un'automobile e a disincrostare la macchinetta del caffè. Spesso, all'inizio, è un po' complicato, ma poi diventa facile.

Come il cucchiaio e la bicicletta, tutti gli altri strumenti finiscono per diventare una nostra estensione. Li usiamo senza pensarci. Ci trasformano. Accrescono le nostre capacità. Ci rendono ciò che siamo. Senza i nostri strumenti non siamo granché.

È il linguaggio a imporci uno degli apprendistati piú difficili. È uno sforzo inaudito, incredibilmente protratto, spaventosamente impegnativo. A diciotto mesi non riusciamo a dire quasi niente di comprensibile. Eppure, ci esercitiamo tutto il giorno.

C'è di che scoraggiarsi, ma non ci arrendiamo. Nessuno dice: «Il linguaggio non fa per me. Non ne vale la pena. Francamente, è troppo faticoso».

Nessun genitore dice: «È cosí carina col ciuccio in bocca, ci spezza il cuore costringerla a qualcosa di cosí difficile. Cosí abbiamo deciso di non parlarle».

Il linguaggio non è uno strumento facoltativo. Non è solo per la gente di rango, per i ricchi o i geni. È per tutti.

Se si volesse scegliere una data in cui l'umanità ha avuto inizio, sarebbe il giorno in cui i nostri antenati hanno deciso di inoltrarsi nella dimensione

linguistica. Molto prima dei Dieci Comandamenti, abbiamo scelto di rispettare questa legge: «Trasmetterai il linguaggio ai tuoi figli».

Un enorme successo

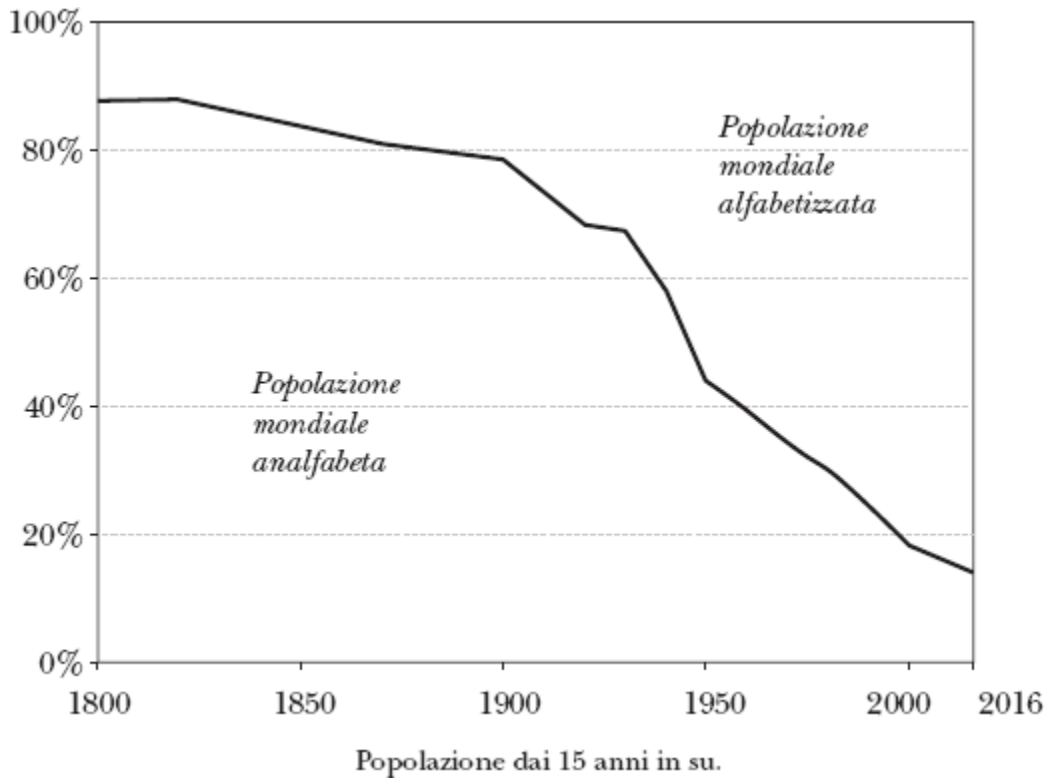
Piú recentemente, negli ultimi centocinquant'anni circa, è stata presa una decisione nuova e cruciale: insegnare a tutti a leggere e a scrivere.

Una tale decisione ha definito la struttura del mondo in modo cosí radicale che diventa difficile immaginare come sarebbe se non fosse mai stata presa. Se, come accadeva in precedenza, solo una piccola minoranza della popolazione avesse avuto accesso alla lettura.

Ai tempi dei geroglifici e dell'antico Egitto, l'arte della scrittura era simile a un potere magico. Gli scribi appartenevano a una casta ereditaria i cui segreti venivano tramandati di generazione in generazione.

Nell'Europa medievale la scrittura era una vocazione. I giovani diventavano monaci, si ritiravano dal mondo e dedicavano la vita a copiare manoscritti.

Cosa ne pensavano i contadini analfabeti del Medioevo? Dovevano immaginare che imparare a leggere e scrivere fosse un dono speciale, una particolare forma di intelligenza che a loro mancava? Trovavano ingiusto e frustrante esserne esclusi? O, piú semplicemente, pensavano di non avere tempo, voglia e denaro, e in ogni caso di non avere niente da leggere?



Evoluzione del tasso di alfabetizzazione nel mondo

Fonte: Our World in Data, su base dati Ocse-Oecd e Unesco (2016).

Oggi nessuno pensa che per leggere e scrivere siano necessarie doti particolari. Nessuno pensa piú che sia inutile. Con poche eccezioni, tutti i sistemi sociali, indipendentemente dalla loro religione e ideologia, fanno dell'educazione primaria una priorità assoluta.

Il progetto radicale di alfabetizzare il pianeta è stato un enorme successo. L'analfabetismo non è scomparso, ovviamente, ma è diventato minoritario. Nel corso di poche generazioni l'umanità ha realizzato un programma globale di trasformazione cognitiva che non ha precedenti nella storia.

Un vero disastro

Contemporaneamente al lancio di questo grande progetto di alfabetizzazione globale, fu presa un'altra fondamentale decisione: a tutti dovevano essere insegnate le basi della matematica.

Oggi, piú di un miliardo di ragazze e ragazzi nelle scuole di tutto il mondo studia matematica.

Ed è un vero disastro.

Oggi, nelle scuole e nei licei di tutto il mondo, piú di cinquecento milioni di ragazze e ragazzi soffrono in silenzio. Sentono di non capire niente e sono combattuti tra il disimpegno (non hanno alcun interesse per la materia) e la mortificazione di non sentirsi abbastanza intelligenti.

Quando si chiede agli adolescenti americani quale sia la materia piú difficile, la matematica è in cima alla lista, con il 37% delle risposte. È anche, di gran lunga, la materia che odiano di piú. Ma quando gli si chiede quale sia la loro materia preferita, la matematica è ancora in cima, con il 23%. Per alcuni è addirittura la materia piú facile[1].

Conosciamo questo bizzarro fenomeno. Fa ormai parte dello scenario e abbiamo imparato a darlo per scontato. Consideriamo normale che ci siano persone che amano la matematica e la trovano facile, e altre che la odiano e la trovano incomprensibile, e consideriamo normale che non ci sia quasi nessuno a metà strada tra queste due posizioni.

Lo troviamo cosí normale che il modo attraverso il quale ci confrontiamo con la matematica fa parte dei nostri stereotipi culturali: il *geek* che la ama (inevitabilmente brufoloso), la ragazza bella e fascinosa che si interessa di moda (inevitabilmente pessima in matematica), quell'altra ragazza in grado di risolvere qualsiasi problema con naturalezza (inevitabilmente autistica), e la tipica ribelle indolente (inevitabilmente pessima in matematica).

Questi stereotipi sono insensati e offensivi. Conosco alcuni ribelli indolenti che sono diventati grandi matematici. Una ragazza del liceo ha il diritto di essere carina e avere molti amici e di poter risolvere tutti i problemi di matematica senza doverci pensar troppo. Ha anche il diritto di diventare una grande matematica.

Ci siamo abituati a questa situazione, il che non è affatto normale. C'è anche qualcos'altro che non torna. E comunque non doveva andare cosí.

Il modo piú semplice per cogliere appieno il lato incongruo della faccenda è mettere a confronto l'apprendimento della matematica con altre abilità fondamentali.

Considereremmo normale che gli adolescenti pensino che sia figo non saper leggere? O supporre che chi legge in modo fluido, senza dover decifrare ogni singola lettera, abbia necessariamente problemi di relazione?

Sarebbe normale che metà di una classe passi la maturità senza sapere come usare correttamente un cucchiaio? O senza sapersi allacciare le scarpe?

Risolvere problemi di matematica al liceo dovrebbe essere facile come allacciarsi le scarpe e, se non lo è, è perché c'è un problema molto grave nell'insegnamento della materia.

Due ipotesi

Per spiegare perché ci sono *studenti bravi in matematica* da una parte e *studenti negati in matematica* dall'altra, vengono generalmente avanzate due ipotesi.

La prima è che sia una questione di motivazione. I negati in matematica sono tali perché non gli piace, e non gli piace perché non capiscono a cosa serve nella vita quotidiana. Ma, per esempio, la gente pensa veramente che studiare storia sia utile nella vita quotidiana? Questo non la rende incomprensibile e le lezioni di storia non spaventano nessuno. Non si è mai visto un alunno piangere perché non riesce a capire cos'è una guerra o una rivoluzione.

Infatti, i negati in matematica hanno capito che essere bravi in matematica ha uno scopo, se non altro per andare bene a scuola ed entrare in una buona università. Non sono stupidi. Capiscono che essere delle frane in matematica gli impedisce di accedere a molte delle professioni meglio remunerate e piú riconosciute. Forse non comprendono perché la matematica sia cosí importante ma sanno che lo è. Si sentono esclusi, il che gli dà un ottimo motivo per odiarla.

La seconda ipotesi è piú crudele. Presuppone un misterioso tipo di intelligenza, *l'intelligenza matematica*, che è distribuita in modo molto diseguale nella popolazione. In questo caso la giustificazione sarebbe di natura biologica. Esisterebbe insomma un bernoccolo matematico, un gene della matematica.

Quelli bravi in matematica sarebbero nati cosí, e quelli negati sarebbero semplicemente degli sfortunati.

Che questa idea sia cosí diffusa è di per sé un fatto sorprendente. Dovremmo aver imparato a diffidare di idee come questa. Un tempo si credeva che alcune razze fossero naturalmente adatte a lavorare nei campi

di cotone mentre altre erano naturalmente adatte a possedere quei campi. Piú di recente si è detto che le donne erano geneticamente incapaci di pilotare aerei da combattimento. Oggi queste idee hanno perso qualsiasi credibilità.

Se avete ancora dubbi, scoprirete nel prossimo capitolo che possedete tutte le facoltà intellettuali per raggiungere un ottimo livello in matematica.

La disuguaglianza biologica esiste, ma non assomiglia a ciò che ho appena descritto. Per toccarla con mano, il modo piú semplice è chiedere a una classe di studenti dell'ultimo anno delle superiori di correre i 100 metri. Alcuni ci metteranno 11 secondi, altri 13 o 18 secondi. E forse per altri ancora saranno necessari 30 secondi per coprire quella distanza.

A queste differenze concorrono molti fattori, come la motivazione, il livello di allenamento, lo stile di vita e naturalmente la genetica. Siamo geneticamente disuguali quando si tratta di correre. Ma, in una corsa di 100 metri, la genetica svolge un ruolo solo per pochi secondi.

Ora immaginate che alcuni riescano ad arrivare al traguardo in 11 secondi, ma dopo una settimana metà della classe sia ancora per strada. È piú o meno il divario in matematica che si vede alla fine della scuola superiore.

Si cercano gli studenti persi. Alcuni di loro sono fermi alla linea di partenza. Vi dicono che correre i 100 metri è la cosa peggiore del mondo. Non capiscono a cosa serva nella loro vita quotidiana e pensano che l'insegnante di educazione fisica sia un vero sadico.

Possiamo seriamente concludere che la spiegazione risiede nella genetica?

Vorrei convincervi che l'unica spiegazione possibile è che si tratta di un gigantesco equivoco. Chi è negato in matematica è tale perché nessuno si è preoccupato di trasmettergli delle chiare linee guida. Nessuno gli ha detto che la matematica è un'attività fisica. Nessuno gli ha detto che in matematica non ci sono cose da imparare ma cose da fare.

Non prende il cucchiaio dalla parte giusta perché nessuno gli ha detto come fare e perché non ha mai visto nessuno prenderlo dalla parte giusta.

Le cose dette durante una lezione di matematica non sono strettamente delle informazioni da fare proprie. Sono istruzioni e indicazioni per azioni invisibili che ognuno deve eseguire nell'intimità della propria mente.

Seguire una lezione di matematica come si segue una lezione di storia o biologia è tanto assurdo quanto prendere appunti, per essere sicuri di non

dimenticare nulla, durante una lezione di yoga. Se non fate alcun esercizio di respirazione, la lezione di yoga non servirà assolutamente a niente.

3. *Con la forza del pensiero*

Immaginate un cerchio, perfettamente rotondo, senza irregolarità. Un cerchio in tutta la sua semplicità. Riuscite a vederlo?

Nella vita reale, i cerchi perfetti non esistono. Quando si disegna un cerchio su un foglio di carta, ha sempre dei piccoli difetti. Non c'è niente di perfettamente rotondo, è cosí anche per le ruote di una bicicletta, per il disco solare, o per i cerchi sulla superficie dell'acqua.

Ma questo non è assolutamente d'ostacolo per capire di cosa sto parlando e dunque per immaginare un cerchio perfettamente rotondo.

Non solo lo si può immaginare, ma si può letteralmente vederlo. Potete muoverlo mentalmente; ingrandirlo o rimpicciolirlo. Potete farci quello che volete.

La capacità di vedere cose che non esistono nella vita reale, di sentirle lí, proprio davanti a voi, e di plasmarle nella mente con la stessa libertà con cui potreste toccarle, è uno dei vostri poteri magici.

Nel percorso di comprensione della matematica partiremo da qui.

La nostra prodigiosa capacità di astrazione

Il cerchio perfetto è un'astrazione matematica. Se per voi i cerchi sono oggetti familiari è perché, come tutti gli esseri umani, avete una naturale capacità di astrazione matematica.

La capacità di astrazione non si limita alla matematica.

Che vi piaccia o no, il tipo di sguardo che dedicate al mondo è astratto. È una caratteristica fisiologica del nostro corpo. Il cervello è una macchina per ricavare astrazioni e manipolarle mentalmente, cosí come i polmoni sono una macchina per estrarre ossigeno dall'aria e trasferirlo nel sangue.

Come è possibile? Questo sarà l'argomento del capitolo 19, dove vedremo come la struttura del nostro cervello ci permetta di creare e manipolare astrazioni *con naturalezza*.

A questo punto, anche se non capite bene come sia possibile un simile miracolo, prendetene atto: siete in grado di vedere un cerchio.

La nostra prodigiosa capacità di ragionare

Una linea retta può tagliare un cerchio in tre punti?

Prendetevi tempo per riflettere. Non c'è nessun trucco. Cercate di farvi un'opinione personale. Provate a immaginare tutti i modi in cui una linea retta può intersecare un cerchio e dunque se in certi casi ci possano essere tre punti di intersezione.

La risposta è no, una linea retta non può intersecare un cerchio in tre punti.

Vi sembra ovvia? Se sí, è perché, come tutti gli esseri umani, possedete una straordinaria capacità di ragionamento matematico.

Non solo siete in grado di immaginare oggetti astratti come linee rette e cerchi, ma siete anche in grado di porvi domande astratte su questi oggetti e di prenderli in mano con la mente per trovare la risposta a queste domande.

La risposta per voi è ovvia, ma come reagireste se qualcuno vi dicesse che ancora non riesce a capire?

Avreste la tendenza a iniziare la spiegazione con un «come vedi…», ma non funzionerà. Chi non capisce è una persona che non vede i cerchi e le linee rette con la stessa chiarezza con la quale li vedete voi. Spiegare la matematica significa far vedere agli altri cose che non sono ancora in grado di vedere.

Il vostro ragionamento è intuitivo e visivo. Nella vostra mente sembra un cartone animato che ha come personaggi un cerchio e una linea retta. Questo tipo di ragionamento è molto efficace, ma difficile da esprimere a parole. Le parole non possono mai esprimere appieno le sfumature di ciò che si vede.

Però, attraverso una formazione matematica, si può imparare a tradurre una propria intuizione visiva in dimostrazioni rigorose. Non sarà mai una traduzione impeccabile. Per esprimere intuizioni semplici, occorrono molte

parole. Tutto è cosí semplice nella vostra testa. Ma, una volta messe per iscritto, le cose assumono un che di tecnico e complicato.

La nostra prodigiosa intuizione

Siete gli unici a poter vedere cosa c'è nella vostra testa. Anche se è impegnativo, è proprio nello sforzo di tradurlo rigorosamente in parole e simboli che potete condividerlo. Questo sforzo di traduzione è anche l'unico modo per verificare che la vostra intuizione non sia sbagliata.

Perché la vostra intuizione a volte è falsa.

Lo sapete bene e non vi va che ve lo si ricordi. Il modo piú sicuro per offendere qualcuno è scherzare sul suo aspetto fisico, ma anche dimostrargli che la sua intuizione è sbagliata può essere un'offesa altrettanto efficace. In linea generale, si attivano due meccanismi di difesa: o la persona dice a sé stessa di non valere niente, e quindi sviluppa un complesso di inferiorità e smette di pensare, oppure dice a sé stessa che ha comunque ragione e che sono gli altri a essere scemi (e anche in questo caso smette di pensare).

Ma esiste una terza via. Quando diciamo a Einstein o a Cartesio che la loro intuizione è sbagliata, non si offendono. Non pensano di non valere niente. Né pensano che gli altri siano degli scemi. Reagiscono in modo diverso. Come? Questo è uno dei temi centrali del libro.

A scuola, quando vi hanno insegnato a non fidarvi del vostro intuito, sono stati commessi due errori. Due gravi errori che hanno rallentato la crescita intellettuale.

Il primo errore è stato quello di esagerare le cose. Vi hanno turbato per niente. Sí, il vostro intuito a volte sbaglia, ma non sempre. Il piú delle volte è nel giusto. E si può fare in modo che abbia ragione sempre piú spesso. Gli si può insegnare a vedere con piú chiarezza e con maggiore acutezza. I matematici costruiscono la propria intuizione visionaria, potente e affidabile, partendo dallo stesso punto. Lo fanno con metodi semplici, come quelli insegnati in questo libro.

Il secondo errore della scuola è stato quello di parlarvi dei punti deboli dell'intuizione, dimenticando di ricordarvi i suoi punti di forza. Il messaggio che avete ricevuto è che la vostra intuizione è imperfetta. È un messaggio importante. Ma la scuola ha dimenticato di trasmettervi un

messaggio ancora piú importante: l'intuizione è la risorsa intellettuale piú potente. In un certo senso, è la vostra *unica* risorsa intellettuale.

Non sono chiacchiere. Non sto cercando di blandirvi con delle fesserie.

Dietro si nasconde una profonda verità biologica, di cui parleremo ancora. È anche una realtà molto pratica che avrete sperimentato migliaia di volte. Sapete bene che imparare a memoria, applicare metodi predefiniti o seguire un ragionamento passo dopo passo non significa realmente capire. Non vi fidate mai completamente delle argomentazioni logiche e vi sentite molto piú a vostro agio con ciò che capite *intuitivamente*.

Il dono di immaginare le cose

Ormai sapete da tempo che le vostre intuizioni sono potenti. Non osate necessariamente dirlo forte e chiaro, ma dentro di voi vi affidate sempre al vostro intuito.

Ciò che forse non sapete è che dietro le piú grandi rivoluzioni scientifiche e dietro la matematica piú complessa, ci sono sempre delle intuizioni e che queste intuizioni sono semplici quanto le vostre.

Ciò che permette a Einstein di inventare la teoria della relatività è un'immagine mentale non molto piú complicata di quella che vi permette di vedere che una linea retta non può tagliare un cerchio in tre punti.

Quando Einstein dice di credere nell'intuizione, non si riferisce a una forma speciale di intuizione che ha ricevuto dal cielo e che è radicalmente diversa dalla vostra. Se cosí fosse, non avrebbe dichiarato di non possedere «doni particolari».

Tutto ciò può confondere, ma è necessario accettare la realtà. Einstein sta parlando dell'intuizione naïf, quella che abbiamo tutti, quella che spesso viene liquidata come infantile e che la scuola ci ha insegnato a disprezzare.

Einstein sta semplicemente parlando della nostra capacità di immaginare le cose. È un dono che tutti abbiamo ricevuto.

Forse non è molto, ma è comunque qualcosa di straordinario e nessuno riceve di piú.

Se, come Einstein, aveste imparato a usare la vostra immaginazione infantile per diventare il piú grande fisico del vostro tempo, direste, come lui, che le grandi scoperte scientifiche sono solo una questione di curiosità (e la gente non vi prenderebbe sul serio).

Anche se non avete formulato la teoria della relatività, avete già qualcosa di cui meravigliarvi.

Potete visualizzare un cerchio e rigirarvelo nella mente.

Potete convincervi, visivamente, che una linea retta non può tagliare un cerchio in tre punti.

Potete fare tutto ciò chiudendo gli occhi e restando fermi.

Potete farlo, letteralmente, con la sola forza del pensiero.

Per quanto ne sappiamo, questa prodezza biologica sembra essere riservata agli esseri umani. Se l'avessero anche gli ippopotami, la starebbero nascondendo assai bene.

Se ci riuscite, siate certi che avete il potenziale genetico e le facoltà intellettuali per diventare molto bravi in matematica. Biologicamente parlando, è tutto ciò di cui avete bisogno. Le altre qualità necessarie non sono genetiche e sono parimenti alla vostra portata. Sono sincerità, pazienza, coraggio e intenzionalità.

Costruire immagini forti e chiare

Le grandi idee sono sempre intuitive e sono sempre semplici. Sono persino *incredibilmente* semplici. Possiamo capire solo cose evidenti. Quando non ci appaiono evidenti, vuol dire che non abbiamo veramente capito.

Questa legge universale è una legge umana. Dice che la scienza è stata inventata dagli esseri umani e che gli esseri umani sono, a un livello molto profondo, fatti tutti allo stesso modo.

Le grandi scoperte sono fatte da persone che cercano solo di capire. Vogliono semplicemente rendere una cosa evidente. Quando non capiscono, non fingono di capire, continuano a cercare la giusta direzione, le giuste immagini mentali, le giuste prospettive, fino a quando non diventa tutto chiaro.

La buona notizia è che con questo metodo si possono scoprire solo cose evidenti. Ciò che era evidente per loro dovrebbe essere evidente anche per voi.

Quindi non avete alcun motivo per farvi intimidire.

Questo vale per tutte le aree creative dell'intelletto e ancora piú per la matematica. Il sapere matematico non si basa su dati sperimentali. Non

richiede l’accumulo di nozioni enciclopediche. In particolare, i libri di matematica non contengono altro che cose evidenti.

Il paradosso è che per trovare ovvio ciò che è ovvio, bisogna aver prima costruito le rappresentazioni mentali che permettono di farlo. Una volta costruite, queste immagini mentali ci permettono di *vedere* istantaneamente e senza sforzo. Ma per costruirle ci vogliono molto tempo e molto impegno.

Senza rendervene conto, avete già costruito un’immagine mentale abbastanza buona di cosa sia un cerchio. Quello che siete riusciti a fare con i cerchi, dovrete riprodurlo con altri oggetti, costruendo altre immagini mentali e combinandole tra loro per costruirne molte altre.

Nessuno nasce con queste immagini già costruite. Nessuno è in grado di costruirle all’istante. Il processo di costruzione richiede molto piú tempo di quanto immaginiamo. Per tutti è un percorso fatto di esitazioni, tentativi ed errori, false partenze e ripartenze. In realtà si tratta di un processo che dura tutta la vita.

Che pratichiate o meno la matematica, la vostra visione del mondo e le vostre immagini mentali sono in costante evoluzione.

È da qui che inizia la tradizione orale dei matematici. Non si tratta di ricette miracolose per diventare superuomini, ma piuttosto di semplici principi per costruire immagini mentali migliori.

La questione è niente di piú o di meno che riprendere il controllo di come si costruisce la propria visione del mondo.

Sapete che per essere in salute dovreste fare esercizio fisico, mangiare frutta e verdura, evitare le droghe e dormire bene. Ma sapreste dirmi quali sono i principi fondamentali che aiutano a costruire immagini mentali forti e chiare?

Fino ad ora ho cercato di farvi credere che dovreste pensare in modo logico, e al contempo decidere sotto sotto di fidarvi solo del vostro intuito, ma non vi ho ancora parlato seriamente della faccenda.

Siete andati avanti senza un metodo e con la falsa convinzione che la vostra intuizione fosse a volte buona e a volte cattiva ma che, fondamentalmente, non ci fosse alcun modo per farla progredire.

In questo contesto, è un miracolo che siate riusciti a imparare qualcosa.

Tuttavia, come vedremo nel prossimo capitolo, avete già sviluppato una forte intuizione matematica. Forse credete di essere degli incapaci in matematica, ma avete perfettamente assimilato concetti matematici che, per il 99% della storia dell’umanità, sembravano essere riservati ai geni.

Avete già costruito potenti immagini mentali e le utilizzate ogni giorno.

4. *La vera magia*

Prendete un miliardo. Togliete 1. Quanto rimane?

Non avete bisogno di pensarci, potete vedere il risultato scritto nella vostra testa: 999 999 999. Il risultato è ancora piú facile da vedere che da dire.

A voi sembra ovvio, ma non a tutti. Per un abitante dell'antica Roma non era affatto ovvio.

In latino classico, la parola «miliardo» non esiste (e nemmeno la parola «milione»). Per rendere il concetto, il modo piú semplice per esprimerlo è come il prodotto di «mille volte mille volte mille». Un romano dell'epoca di Giulio Cesare l'avrebbe capito, anche se probabilmente gli avrebbe fatto girare un po' la testa. Ma se gli aveste detto che eravate in grado di prendere questo numero, sottrarre 1 e vedere *subito*, a livello mentale, il risultato, non vi avrebbe seguito affatto.

Avrebbe pensato che foste uno scienziato pazzo.

Provate a scrivere 999 999 999 in numeri romani e vi troverete nei guai. Per chi conosce solo i numeri romani, 999 999 999 non è solo un numero molto grande che non ha nulla a che fare con la vita quotidiana. È un numero difficile da scrivere. È un numero vertiginoso e terrificante, impossibile da affrontare. L'idea che qualcuno possa «vederlo» all'istante con precisione e senza alcuno sforzo è un'idea assurda.

Il caso dei romani non è per nulla straordinario. La loro comprensione dei numeri era già molto avanzata.

Il modo tradizionale di contare di alcune popolazioni aborigene australiane si basa sulle parti del corpo. Da uno a cinque si conta sulle dita, poi si prosegue sul braccio. Sei è il polso. Sette è l'avambraccio. Otto, il gomito, nove, il bicipite. Quando si arriva a dieci, cioè alla spalla, si continua a salire. Il numero dodici è il lobo dell'orecchio.

Se ogni numero dovesse avere una sua parte del corpo, avreste il coraggio di arrivare al miliardo?

Altri popoli cacciatori-raccoglitori hanno sistemi di numerazione ancora piú elementari. Alcuni conoscono solo uno, due, tre, quattro, cinque e un numero generico che significa *molti*. Nelle lingue yanomami dell'Amazzonia esiste una parola per «uno» e una per «due», ma non esiste una parola per «tre». Tre è già «molti».

Per una persona che vede il mondo in questo modo, scoprire che esiste una sfumatura tra 25 e 26 e che può essere espressa in modo preciso, deve essere un'esperienza spirituale molto forte, paragonabile a quella che vive uno studente di matematica quando impara che esistono diverse dimensioni dell'infinito e che possono essere espresse in modo preciso.

Un inganno?

Un abitante dell'antica Roma vedrebbe subito la sfumatura tra XXV e XXVI, ma la vostra agilità con i grandi numeri gli farebbe credere che avete capacità di calcolo prodigiose.

L'idea vi fa sorridere perché, in fondo, sapete che è un inganno: non avete quella capacità prodigiosa.

Ma ne siete cosí sicuri?

Se pensate che chi riesce a fare incredibili calcoli a mente sia un mutante con poteri magici, se pensate che abbia un computer nella testa che gli permette di calcolare ultravelocemente con i metodi che conoscete, vi sbagliate.

In sostanza, i «calcolatori prodigio» sono un po' come i maghi e Babbo Natale: non esistono davvero.

Quando si pensa di vedere Babbo Natale, non è mai veramente Babbo Natale, è sempre un tizio vestito da Babbo Natale.

Quando si pensa di vedere un mago, in realtà non è mai un mago, ma è sempre un *illusionista*, cioè uno che conosce certi trucchi capaci di dare l'impressione di essere dotato di poteri magici.

Quando pensate di vederne uno, non è mai veramente un «calcolatore prodigio», ma è sempre un tizio il cui modo di vedere i numeri rende facili e perfino ovvie operazioni complesse e per voi quasi impensabili.

La verità è che tutti noi siamo fondamentalmente scarsi nel calcolo mentale, tranne quando abbiamo un modo intuitivo per semplificare notevolmente l'operazione e «vedere» il risultato.

La scrittura decimale basata sui numeri arabi è un «espediente» che permette di vedere certi risultati come evidenti. La differenza principale tra voi e i calcolatori prodigio è che loro hanno una gamma di espedienti piú ampia della vostra e sono piú abituati a usarla.

Capire per davvero

Il sistema di scrittura dei numeri in forma decimale sembra cosí scontato che non ci ricordiamo piú di averlo dovuto imparare. È proprio come per il cucchiaio. Lo usiamo senza pensarci, come se fosse un'estensione del nostro corpo. Quando vediamo 999 999 999, pensiamo di guardare un numero, senza renderci conto che lo stiamo guardando attraverso uno strumento.

Eppure, la scrittura decimale è un'invenzione squisitamente umana. Infatti, piú che un sistema di scrittura è una porta d'accesso a uno stato di coscienza in cui i numeri interi, per quanto grandi, diventano oggetti concreti e precisi. Nel processo, l'infinità stessa dei numeri interi diventa evidente.

Qualcosa che prima era impensabile diventa improvvisamente ovvia: è questo il preciso tipo di effetto che la matematica ha sul cervello. È una sensazione meravigliosa, un'intensa forma di piacere.

Quando eravate bambini eravate orgogliosi di saper contare fino a dieci, poi fino a venti, poi fino a cento. Questo permetteva di mettervi in mostra durante la ricreazione. Per potervi mettere ancora piú in mostra, avreste voluto conoscere il numero piú grande in assoluto.

In fondo, la vostra consapevolezza dei numeri non era molto lontana da quella dei cacciatori-raccoglitori che sanno contare fino a due, o a cinque, e sono fermamente convinti che il numero successivo, il *molti*, sia il numero piú grande che esista.

Un giorno vi siete resi conto che nessun numero è il piú grande in assoluto. Anche se si poteva arrivare a questa conclusione per altre vie, la scrittura decimale ha fornito una scorciatoia. Sapete che ogni numero è seguito da un altro numero. Sapete vedere la successione dei numeri come

un contatore che gira e sapete che questo contatore può girare all'infinito. Non c'è un limite, non c'è un numero speciale dopo il quale il contatore si blocca.

Per il 99% della storia dell'umanità, nessuno ha imparato a visualizzare un contatore di numeri mentale.

Il contatore di numeri che gira nella vostra testa è il lavoro collettivo di grandi matematici che, dalla preistoria al Medioevo, hanno plasmato l'immagine dei numeri che oggi condividiamo.

Questa immagine non è *naturale*. Non era già inscritta nel vostro essere dalla nascita. È in parte arbitraria: avremmo potuto scegliere un altro sistema per scrivere i numeri e voi li avreste visti in modo diverso.

Oltre quattromila anni fa, i babilonesi inventarono un sistema *sessagesimale* : scrivevano i numeri in base 60, non in base 10[1]. La matematica babilonese era la piú avanzata del tempo. E la vostra immagine mentale di ore, minuti e secondi è ancora profondamente influenzata dalla loro visione dei numeri.

Ciò che è naturale, tuttavia, è la capacità di accogliere la matematica astratta e di comprenderla davvero, cioè di plasmare il cervello in modo che questa matematica diventi effettivamente parte di voi.

Vi sembra di vedere il numero 999 999 999. In realtà, state decifrando una notazione matematica astratta e complessa. La decifrate in modo del tutto fluido, in un colpo solo, senza nemmeno rendervene conto. I numeri interi non erano la vostra lingua madre, ma siete diventati bilingui.

È a questo che assomiglia apprendere con successo un concetto matematico. Se l'esempio vi sembra stupido, è perché l'avete capito davvero.

La vera magia non esiste

A inizio carriera, i giovani matematici hanno spesso la sensazione di essere degli impostori.

Conosco bene questa sensazione e, nel mio caso, tutto sembrava giustificarla. I risultati della mia tesi erano cosí banali che parevano quasi una truffa. I miei teoremi sono sempre stati naïf e le loro dimostrazioni non hanno mai posto vere difficoltà.

Intorno a me c’erano molte persone, molto brave, che facevano calcoli molto difficili dei quali non capivo nulla. Non sono mai riuscito a leggere gli articoli profondi e difficili. Alla fine, quelli che riuscivo a leggere erano sempre i piú facili.

Avrei voluto essere in grado di fare la vera matematica, la matematica difficile. Tutto ciò che riuscivo a capire era una matematica facile, una matematica per gli stupidi.

Sembra sciocco da raccontare, ma mi ci sono voluti anni per capire che si trattava solo di un’illusione ottica. La linea dell’orizzonte si è spostata con me. È sempre rimasta alla portata delle mie capacità.

Non esiste una vera magia. Non appena si impara un trucco di magia, questo smette di essere tale. Può essere deprimente, ma bisogna farsene una ragione.

Se trovate troppo facile la matematica alla vostra portata, non è perché è facile, ma perché la capite.

5. *I gesti invisibili*

Un grande matematico è, per esempio, qualcuno che nasce in una cultura in cui la gente sa contare solo fino a 5 e che un bel giorno si rende conto che si può andare piú in là.

Nessuno inventa tutt'a un tratto che i numeri sono infiniti. All'inizio, le idee matematiche sono sfocate e incomplete. Si ha la sensazione di poter arrivare a 6 o forse a 7, ma non si riesce a esprimerlo perché non si conoscono le parole per esprimere 6 e 7. Si ha persino l'impressione di poter andare oltre, ma questa impressione è fugace, non ci si crede completamente, si pensa che, da qualche parte, ci debba essere qualcosa di sbagliato.

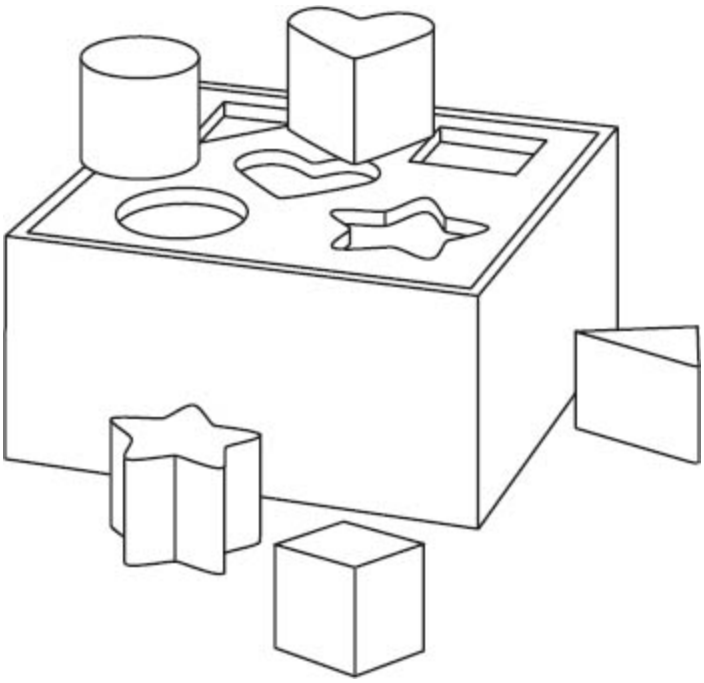
Questo è ciò che accade quando ci si imbatte nei limiti del linguaggio.

Per esprimere ciò che sentiamo, dobbiamo inventare nuove parole o fare un nuovo uso di quelle esistenti. Dare nomi alle nostre impressioni fugaci ci permette di ancorare i nostri pensieri. È un'operazione fondamentale, ma richiede tempo. Le parole non arrivano facilmente e non arrivano subito.

La fase iniziale di una scoperta è un'esperienza spirituale. Pensate al di fuori del linguaggio. Il mondo diventa piú chiaro. Avrete delle rivelazioni. Vedrete cose che fino a quel preciso momento erano nascoste. Sono cose talmente nuove che non hanno ancora un nome.

Conoscete bene questa sensazione meravigliosa. L'avete già provata in passato. Fatela riaffiorare: la prima volta è stato il giorno della vostra prima grande scoperta matematica.

Quando eravate piccoli, prima ancora di poter parlare, probabilmente facevate un gioco che assomigliava a questo:



I vostri genitori vi hanno mostrato come fare. Hanno preso un pezzo e lo hanno messo in un foro. Avete voluto imitarli. Avete preso un pezzo e avete cercato di inserirlo in un foro. Ma non ha funzionato. Avete spinto piú che potevate, ma il pezzo non entrava.

Questo vi ha fatto arrabbiare. I vostri genitori vi hanno detto che non c'era motivo di spingere e che bastava guardare con attenzione: il pezzo rotondo va nel foro rotondo, il pezzo quadrato in quello quadrato. Guarda, è cosí facile, no?

Salvo che non avevate capito nulla delle loro spiegazioni. Non avevate alcuna possibilità di capirle. Le parole «rotondo» e «quadrato» non avevano senso per voi. Non era il vocabolario che vi mancava ma, peggio ancora, le forme stesse. Non eravate in grado di vederle. I tondi e i quadrati erano per voi invisibili.

Tutto quello che potevate vedere era che i vostri genitori riuscivano a infilare i pezzi nei fori e voi no. Eravate sicuri di fare esattamente lo stesso gesto che facevano loro. Ma i loro gesti funzionavano, i vostri no.

La scena si è ripetuta decine di volte. È andata avanti per mesi, è stata la peggiore frustrazione della vostra vita. I vostri genitori erano dei maghi, voi no. Era ingiusto e crudele e vi siete spesso arrabbiati.

Ciò nonostante, non vi siete mai arresi. Siete tornati cento volte sull'enigma che vi stava cosí umiliando. Poco importava l'umiliazione in sé

e per sé: volevate capire, volevate svelare il segreto.

E poi, un bel mattino, avete capito. Avete preso in mano un pezzo e avete notato che aveva qualcosa di speciale in comune con uno dei fori. Ed è proprio in quel foro che bisognava inserire il pezzo.

Risolvere l'enigma non vi ha richiesto alcuno sforzo. Stavate solo facendo i soliti gesti, quelli che non funzionavano il giorno prima. All'improvviso è diventato ovvio. Non c'è altro modo per dirlo: è saltato all'occhio.

È in questo periodo della vita che avete inventato la nozione di forma. Non si trattava solo di quel pezzo e di quel foro. Si trattava di tutti i pezzi e di tutti i fori. Ogni pezzo aveva il suo foro corrispondente con cui condivideva questa cosa immateriale che non aveva nome. Ha funzionato ogni volta. Questo era il segreto di quel magico trucco.

Avete inventato la nozione di forma da soli e per voi stessi. Non si tratta di una conoscenza preesistente, che viene dall'esterno, portata dal linguaggio. Avete imparato da soli a vedere le forme perché, finché non sapevate come vederle, nessuno poteva spiegarvi cosa fossero. Le parole per descriverle le avete imparate dopo: le avete imparate andando *oltre* la vostra percezione delle forme.

Da allora, niente vi ha piú impedito di vederle. È cosí facile. Tondi e quadrati, triangoli e stelle, cuori. È persino troppo facile. Avete perso addirittura la capacità di concepire cosa significhi non vederle.

Una grande storia d'amore

Colgo l'occasione per mettere le cose in chiaro.

Quando avete scoperto il segreto per far entrare i pezzi nei fori, siete stati molto felici. Eravate profondamente orgogliosi. Avevate un sorriso da un orecchio all'altro.

Anche i vostri genitori erano orgogliosi e felici per voi. Se vi hanno dato quel gioco, è stato per permettervi di provare una tale soddisfazione. I vostri genitori forse non lo sapevano, ma avevano un profondo amore per la matematica. Regalandovi quel gioco, hanno voluto trasmettervi il loro amore per la matematica e ci sono riusciti. Se avete dei bambini, anche voi avrete voglia di regalarglielo.

Prima che la scuola si intromettesse nella faccenda, prima delle interferenze causate dalle nostre inibizioni e dalla paura di essere giudicati, tutti noi abbiamo vissuto grandi gioie matematiche. Quella tra l'umanità e la matematica è una storia d'amore molto lunga e profonda.

I vostri inizi sono stati promettenti. La vostra scoperta delle forme è stata davvero una grande scoperta matematica. Sono serio, non è una metafora.

La vostra grande scoperta è stata perfettamente inutile per il resto dell'umanità, perché non avete fatto altro che riscoprire un concetto già noto. Ma dal punto di vista delle conoscenze che avevate in quel momento, si è trattato di una scoperta straordinaria.

Ciò che avete provato quel giorno è esattamente ciò che prova un matematico quando fa una scoperta. Una scoperta matematica è altrettanto semplice, profonda e ovvia.

Prima di Cartesio, nessuno aveva capito che le figure geometriche potevano essere descritte da equazioni. Con il trattato *La geometria* del 1637, Cartesio colmò il divario tra algebra e geometria, due rami della matematica che fino a quel momento erano considerati completamente a sé stanti. Queste scoperte sono all'origine della moderna nozione di *coordinate cartesiane*, che è diventato un concetto palese per tutti gli studenti: un punto nel piano può essere definito dalla sua ascissa e dalla sua ordinata. È davvero difficile immaginare che prima di Cartesio nessuno abbia visto le coordinate cartesiane. È quasi assurdo, come immaginare che le persone non vedano cerchi e quadrati.

Capire un concetto matematico significa imparare a vedere cose che, fino a quel momento, non si potevano vedere. Vuol dire imparare a trovarle evidenti e far progredire il proprio livello di conoscenza.

Quando si osserva il mondo, non si può fare a meno di riconoscere forme, dimensioni, consistenze, colori. Ma ci sono molte altre cose che si possono vedere. Esistono altre strutture, altri tipi di forme, altri tipi di relazioni tra gli oggetti. Anche se oggi vi sfuggono, queste forme e strutture possono diventare evidenti.

Non sono cosí lontane.

Non sono cosí difficili da vedere.

Sono *letteralmente* sotto i vostri occhi.

Billie e le sue amiche

Inserire i pezzi giusti nei fori giusti non è piú difficile che mangiare con un cucchiaio. Ma imparare a incastrare i pezzi giusti nei fori giusti è decisamente piú ostico che imparare a mangiare con il cucchiaio.

Nel caso del cucchiaio, siete stati in grado di imparare per imitazione. Nel caso del gioco delle forme, avete cercato di imparare per imitazione, ma non ha funzionato. Vi mancava l'elemento fondamentale. Riconoscere la forma del pezzo e trovare il foro giusto sono gesti invisibili che i vostri genitori facevano mentalmente e che voi non avevate modo di imitare direttamente.

È importante ricordare che la maggior parte delle cose che impariamo, le impariamo per imitazione. L'istinto di imitazione è universale. Lo condividiamo con tutti i mammiferi, e non solo con loro.

La mia storia preferita sull'apprendimento per imitazione è quella di Billie e delle sue amiche. Billie era una femmina di delfino che viveva nella baia di Port River, a Adelaide, in Australia. Da giovane, Billie si era persa; isolata dal suo gruppo, arenata in una baia, esausta, è stata raccolta dai soccorritori e messa in un delfinario il tempo necessario per rimettersi in salute.

Il delfinario ospitava delfini in cattività che erano stati addestrati dall'uomo a eseguire figure acrobatiche. Quando Billie li ha visti fare queste figure, ha iniziato spontaneamente a imitarli.

La sua manovra preferita era il *tailwalk*. Consiste nel prendere slancio nuotando sott'acqua sul dorso e poi uscire improvvisamente in verticale: con lo slancio, il delfino sembra camminare all'indietro sull'acqua, stando in piedi sulla coda – da qui il nome della figura. È un movimento difficile, fisicamente impegnativo e di nessuna utilità pratica se non quella di esibirsi davanti ai compagni.

Tre settimane dopo, quando Billie è stata rilasciata nella sua baia d'origine, ha continuato a praticare il *tailwalk*, una figura che non è mai stata osservata in un delfino in libertà. Ma la cosa piú interessante è stata quello che è successo dopo: le altre femmine del gruppo di Billie hanno iniziato a fare la stessa figura. Il *tailwalk* è diventato *di moda* tra i delfini di Adelaide[1].

Da questo punto di vista, siamo esattamente come i delfini: non solo abbiamo la capacità di imparare guardando gli altri, ma abbiamo anche la pulsione a imitarli. Il nostro istinto spinge a imitarci l'un l'altro.

Impariamo ad allacciarci le scarpe, a usare il tostapane o ad andare in bicicletta per imitazione. Non è detto che ci riusciamo al primo colpo, ma guardare gli altri ci dà un'idea. Capiamo «approssimativamente» a cosa serve un cucchiaio, un tostapane o una bicicletta e capiamo «approssimativamente» come usarli.

Ma la matematica, poiché comporta gesti invisibili, non può essere appresa per imitazione.

La tecnica di Fosbury

Per fare una scoperta matematica, bisogna iniziare a inventare nuovi gesti mentali, a creare nuove immagini nella propria testa, senza sapere in

anticipo come farlo e senza essere sicuri che funzionerà.

Nella vita, inventare un gesto veramente nuovo è cosí raro che non è facile trovare esempi storici ben documentati. Nemmeno Michael Jackson ha inventato il *moonwalk*. L'ha imparato per imitazione. L'origine di questo passo di danza risale almeno agli anni Trenta; i suoi inventori sono dei geni anonimi.

Dick Fosbury, invece, ha inventato un movimento veramente nuovo, la tecnica del salto in alto che oggi porta il suo nome.

Prima di lui, le due tecniche principali erano il salto a forbice (sulla schiena, con le gambe in avanti) e il ventrale (a pancia in giú, con le spalle in avanti).

Il salto di Fosbury, sulla schiena e con le spalle in avanti, può sembrare controintuitivo. Fuori dal suo contesto e senza materasso, sembra un tentativo di suicidio. Al nostro corpo non viene assolutamente spontaneo fare un simile movimento. Per osare lanciarsi all'indietro, con la testa in avanti, bisogna disinnescare quell'istinto di fuga che ci comunica chiaramente che quel movimento è decisamente troppo pericoloso per essere tentato.

Fosbury non ha copiato quel movimento da nessuno. Ha iniziato a immaginarlo nel 1963, quando aveva sedici anni, e ci ha messo anni per perfezionarlo.

A Fosbury sarebbe piaciuto poterlo semplicemente imitare, non si vergognava di farlo. Non era vanitoso e non stava cercando di essere originale o creativo. Sapeva che l'imitazione è il metodo piú pratico per imparare e, naturalmente, per prima cosa cercò di saltare come facevano gli altri.

Tutto è cominciato col fatto che al liceo era il peggiore della squadra. Poiché non riusciva a migliorare utilizzando le tecniche ufficiali, ha iniziato a sperimentare, cercando un modo piú intelligente ed efficiente di saltare: «Il mio obiettivo non era vincere, ma solo non perdere»[2].

Il punto di forza della sua tecnica è che permette di superare l'asticella avvolgendosi intorno a essa mentre il baricentro resta sotto la sbarra: ogni parte del corpo passa sopra l'asticella in successione, ma *in media* il corpo rimane sempre sotto di essa. Con la stessa spinta, si può superare un'asticella molto piú alta.

Fosbury comprese molto bene questi aspetti scientifici. All'università, i suoi interessi lo avevano portato verso le scienze ingegneristiche. Ma piú che con i calcoli, scoprí gradualmente il suo metodo attraverso l'introspezione, prestando molta attenzione all'ascolto del proprio corpo e concentrandosi sui gesti che facilitavano il superamento dell'asticella. Fosbury, nel suo approccio, era spinto sia dall'intenzionalità sia dal suo lato meditativo.

Un giorno, cambiando la traiettoria della corsa e la posizione del corpo, ha guadagnato quindici centimetri sul proprio record personale. È stato il suo primo vero successo in una competizione scolastica. Da quel momento ha capito di essere sulla buona strada, ma i suoi allenatori non ci credevano. Per anni hanno cercato di convincerlo a imparare a saltare correttamente. Non ha mai avuto degli argomenti solidi da opporre. Diceva semplicemente che la sua tecnica poteva non essere quella giusta, ma era quella giusta *per lui*.

Grazie alla sua tecnica, Fosbury ha vinto la medaglia d'oro alle Olimpiadi del 1968 a Città del Messico. Aveva ventun anni. Le sue prime interviste dimostrano che non si rendeva ancora conto dell'importanza della sua scoperta: «Penso che ora molti ragazzi cercheranno di saltare come faccio io. Non garantisco i risultati e non raccomando il mio stile a nessuno»[3].

Ma tutti l'hanno seguito. Ai successivi Giochi olimpici del 1972, la sua tecnica era diventata lo standard. Per oltre quarant'anni, ogni volta che il

record mondiale di salto in alto è stato battuto, è stato grazie alla tecnica di Fosbury.

Riprodurre alla cieca

Gli elementi piú evidenti dell'approccio di Fosbury si ritrovano, nel corso di questo libro, attraverso il racconto del metodo di lavoro dei matematici.

Una scoperta parte sempre dal semplice e ingenuo desiderio di capire. Si inventano nuove tecniche non per il gusto del nuovo, ma perché le tecniche esistenti non sono sufficienti. Senza punti di riferimento, senza nessuno che ti guidi, devi ascoltare il tuo corpo. Bisogna abituarsi a sentire il proprio corpo in un modo nuovo. Trovare la soluzione è rendere concepibili cose che fino a un attimo prima non lo erano. È come aumentare le capacità cognitive dell'essere umano.

Una peculiarità della matematica è che la semplice comprensione pone delle difficoltà della stessa natura del processo col quale si arriva alla scoperta in sé: l'introspezione continua a svolgere un ruolo centrale. Per riprodurre gesti invisibili, bisogna mettersi in ascolto di sé stessi e reinventarli *dentro sé stessi* e *per sé stessi*.

Per capire questo genere di difficoltà, immaginate una versione invisibile del salto in alto, praticata senza testimoni né telecamere, in una sala vuota, e le cui gare siano giudicate da dispositivi elettronici che controllino che l'asticella sia stata superata senza registrare nulla della tecnica del saltatore.

Come avrebbe potuto Fosbury raccontare la propria storia?

Tutti sarebbero stati convinti che fosse geneticamente programmato per saltare piú in alto di tutti gli altri. Nessuno gli avrebbe creduto se avesse detto: «Non sono biologicamente superiore, e inoltre le mie capacità atletiche non mi permettevano di competere con gli altri, finché non ho scoperto un nuovo metodo».

Avrebbe scritto un libro per descrivere la sua tecnica per come la percepiva da una prospettiva interiore. Ma come trovare le parole giuste? La prima volta che uno dei suoi salti è stato filmato, Fosbury racconta di essere rimasto sorpreso perché stentava a credere che quello che vedeva sullo schermo fosse fisicamente possibile e che fosse davvero quello che stava facendo.

Per chi non ha mai visto un salto alla Fosbury, imparare quella tecnica è difficile quasi quanto inventarla da soli. Anche con istruzioni dettagliate, è estremamente complesso. «Lanciatevi in aria sulla schiena, con la testa in avanti». Davvero? E perché tutte quelle pagine di preliminari sulla traiettoria della rincorsa e sull'inclinazione dell'asse del corpo quando ci si avvicina all'asticella? Perché tutto quel linguaggio tecnico? È proprio necessario?

Imparare un gesto significa comprenderlo al di là delle parole. Significa sentirlo nel proprio corpo. Significa trovarlo naturale e intuitivo.

I gesti invisibili

La matematica è misteriosa e difficile perché non possiamo vedere come fanno gli altri, i matematici. Possiamo vedere ciò che è scritto sulla lavagna o su un foglio di carta, ma non possiamo vedere ciò che succede precedentemente nella loro testa e che li rende capaci di pensarlo e di scriverlo.

La matematica in sé è semplice, ma i gesti mentali che permettono di appropriarsene sono sottili e controintuitivi. Questi gesti sono invisibili. Non possiamo imitare ciò che fanno gli altri. Abbiamo solo parole per parlarne, e le parole non riescono mai a cogliere il punto, l'essenziale: ovvero ciò che sentiamo realmente nel nostro corpo.

Ognuno deve ricreare i gesti per sé, alla cieca. È facile prendere in giro gli insegnanti di matematica, ma provate a mettervi nei loro panni.

Come spieghereste a qualcuno come allacciarsi le scarpe se non ha mai visto delle scarpe e il vostro unico canale di comunicazione è una conversazione telefonica? Prendetevi un momento per immaginare la scena e capirete quanto sia difficile. L'idea di per sé è opprimente davanti a una simile, vertiginosa difficoltà.

Questa realtà pratica dell'insegnamento della matematica condiziona le difficoltà concrete che incontriamo tutti.

I matematici professionisti hanno una cosa in comune con gli incapaci in matematica: sanno come ci si sente quando si è completamente persi.

È un'esperienza che fa parte del loro quotidiano. Un matematico che partecipa a una conferenza di ricercatori sa che probabilmente smetterà di ascoltare dopo i primi cinque minuti. Sa che dopo non avrà piú senso

insistere, che sarà solo una sofferenza e un’umiliazione, perché le parole che ascolterà per lui non significheranno nulla.

Ma un matematico di professione sa anche che sentirsi abbandonati è una parte normale del processo di comprensione. Non si offenderà e soprattutto non farà finta di capire. Non proverà nemmeno a prendere appunti. Smetterà semplicemente di ascoltare.

Se vuole davvero capire, lo farà in modo diverso.

6. *Il rifiuto di leggere*

Non sono un collezionista, non amo accumulare oggetti. Questo vale anche per i libri, e piú volte nella vita mi sono liberato di gran parte della mia biblioteca, regalando o vendendo la maggior parte dei libri. Ho tenuto solo quelli a cui ero particolarmente affezionato.

La mia biblioteca di matematica è piccola: meno di cento titoli. Sono in pochi ad avere cento libri di matematica a casa, ma alcuni matematici ne hanno molti di piú. Ho accumulato questi libri attraverso i miei studi e la mia carriera. Alcuni mi sono stati regalati perché conoscevo l'autore. Meno di cento, dopo tutti questi anni, non sono poi cosí tanti.

La maggior parte dei libri di cui avevo bisogno li ho presi in prestito o consultati in formato elettronico. Ho comprato solo quelli che mi piacevano davvero, che volevo avere o che ritenevo davvero belli.

Uno dei miei libri preferiti, uno dei pochi che a separarmene mi si spezzerebbe il cuore, è *Categories for the Working Mathematician* di Saunders Mac Lane.

Ogni volta che mi capita di averlo tra le mani mi strappa un sorriso. Il libro risale agli anni Settanta ed è tuttora il punto di riferimento della «teoria delle categorie», quel modo rivoluzionario di vedere e pensare le strutture matematiche che Mac Lane e Samuel Eilenberg hanno inventato negli anni Quaranta.

L'ho comprato vent'anni fa, subito dopo la tesi di laurea, con il mio primo stipendio da assistente all'Università di Yale. Pochi libri mi hanno colpito cosí tanto. Lo trovo splendido, stimolante, molto lucido e straordinariamente ben scritto.

Non l'ho mai letto.

Raphaël

All’inizio della mia tesi, anche se ero ufficialmente *tra i migliori in matematica* e anche se il mio lavoro consisteva già nel produrre nuova matematica, mi sentivo ancora in soggezione di fronte al livello a cui era arrivato il sapere in questa disciplina.

Ogni volta che aprivo un articolo di ricerca, mi bloccavo alle prime righe. Mi mancavano le basi. Le avrei cercate nei riferimenti dell’articolo originale, ma quei riferimenti non erano molto piú leggibili dell’articolo in sé. Andavo quindi a cercare i riferimenti dei riferimenti.

I riferimenti, i riferimenti dei riferimenti, i riferimenti dei riferimenti dei riferimenti: si può continuare all’infinito. Tornando alla matematica degli anni Cinquanta, mi rendevo conto che per me era già incomprensibile. Diverse generazioni dopo, ero sepolto sotto migliaia di libri e decine di migliaia di articoli di ricerca, tutti per me incomprensibili. Come potevo sperare di inventare qualcosa di originale?

Un giorno ho sentito parlare di un libro uscito da poco su un argomento utile – ma non centrale – per le mie ricerche. Tutti dicevano che il libro era molto chiaro e ben scritto. Mi è venuta voglia di leggerlo.

Dopo una settimana, non ero ancora arrivato alla terza pagina. Demoralizzato, sono andato a chiedere aiuto al mio amico Raphaël Rouquier, il giovane prodigio della matematica con cui condividevo l’ufficio.

La sua reazione mi è rimasta impressa nella memoria: «Ma dai, David! Non ti hanno detto di non leggere mai i libri di matematica? Nessuno ti ha detto che è impossibile leggerli?».

Osare non leggere

No. Nessuno aveva avuto il coraggio di dirmelo in modo cosí esplicito.

Raphaël stava esagerando: leggere libri di matematica è possibile. Ma è contro la natura umana e richiede uno sforzo straordinario, anche se si è molto bravi. Leggere un vero libro di matematica (e non semplicemente un libro *sulla* matematica come quello che avete in mano) è difficile quasi quanto scriverne uno.

C’è una buona ragione. Quando aprite un libro di matematica, state aprendo un libro in cui le parole hanno un significato che non potete ancora comprendere. A volte il significato è specifico nel contesto di quel particolare libro. La lettura di un libro richiede la comprensione delle parole che contiene. Per arrivare alla comprensione, dovrete costruire le giuste immagini mentali di ogni parola e di ogni sequenza di parole. Lo sforzo richiesto è intenso, quasi quanto quello dell’autore che ha scritto il libro, e questo sforzo vi porterà a comprendere l’argomento quasi quanto lui.

Se siete davvero motivati, se avete tempo a disposizione e se il libro è ben scelto, può valere l’impegno. Preparatevi a mesi di duro lavoro. È una prova iniziatica che vi trasformerà. Nella vita, sono riuscito a leggere solo tre o quattro libri di matematica. Non mi pento di aver fatto un simile sforzo. Mi ha dato una forza incredibile, come se avessi bevuto una pozione magica. Questa forza mi accompagna ancora oggi. Ma la pozione era difficile da mandar giú.

Anche se Raphaël esagerava, aveva profondamente ragione. I libri di matematica non sono fatti per essere letti.

Già il modo in cui teneva in mano i libri era diverso dal mio; non metteva, letteralmente, le mani dove le mettevo io. Raphaël è stata la prima persona che ho conosciuto a cui la matematica non faceva mai paura. Non aveva problemi a prendere in mano un libro di cinquecento pagine su un argomento di cui non sapeva nulla e aprirlo a metà.

Raphaël teneva i libri in equilibrio sull’avambraccio, afferrando la parte superiore della copertina con le dita piegate, e lasciando l’altra mano libera per girare le pagine molto rapidamente. La tecnica è piuttosto semplice. Consiste nel non partire mai dall’inizio, ma da dove si vuole arrivare. Non è una tecnica di lettura, è una tecnica di non lettura.

In pratica, quando si prende in mano un libro di matematica, si ha sempre un’idea in mente. Forse volete capire un concetto che avete appena incontrato da qualche parte, scoprire se un particolare enunciato è vero o farvi un’idea di come dimostrarlo. Quello che vi interessa veramente potrebbe essere la definizione 7.4 a pagina 138, il teorema 11.5 a pagina 227, o forse solo una sezione particolare della sua dimostrazione.

Quello che Raphaël mi ha insegnato a fare è andare direttamente a pagina 138 o 227, e cercare le quattro o cinque righe che, in quel particolare momento, sono le piú interessanti, *senza farmi il minimo scrupolo* per la montagna di preliminari da cui quelle poche righe dovrebbero dipendere.

È questo l’aspetto piú inquietante. Un libro di matematica dovrebbe essere organizzato in modo logico e per capire la pagina 138 o 227, *in teoria*, si dovrebbe aver capito tutto ciò che la precede. La lettura lineare dovrebbe quindi essere l’unico modo possibile di leggerlo. Ma, in pratica, è impossibile.

Nelle quattro o cinque righe che ci interessano, ci saranno senza dubbio parole misteriose. Se questo ci ostacola nella comprensione, saremo spinti a risalire alle definizioni. Va bene, non c’è problema. Oppure ce la caveremo in un altro modo. Anche questo va bene.

In realtà, si può fare ciò che si vuole. Si può sfogliare il libro per dieci secondi, un’ora o tre mesi, non importa. Il principio fondamentale è non imporsi mai di seguire la progressione delle pagine, ma seguire sempre le priorità del proprio interesse e della propria curiosità.

Il libro deve essere al nostro servizio, non il contrario. Se cerchiamo di leggere un libro di matematica come un libro «normale», se lasciamo che sia lui a imporre il ritmo, se aspettiamo che ci prenda per mano e ci racconti una storia, non funzionerà mai. Non è un ascolto passivo. Non ne abbiamo la pazienza e, siamo onesti, non ci interessa. Siamo qui perché abbiamo domande specifiche, perché ci sono cose che non capiamo e che vogliamo capire.

In nessun caso il libro deve imporci l’argomento della conversazione. Siamo *noi* a porre le domande.

Ma non dobbiamo prenderci in giro. Capire le quattro o cinque righe che ci interessano sarà molto difficile, soprattutto se si trovano a metà del libro. Forse ci passeremo ore e ore. Ogni pagina di un libro di matematica è molto difficile da capire. Le introduzioni che si presume siano facili, e quindi noiose, non sono meno difficili da capire.

In fin dei conti, la pagina che ci interessa di piú è probabilmente la meno difficile *per noi*. In primo luogo, perché ci interessa: è tutto molto piú facile quando ci interessa! In secondo luogo, perché è necessariamente legata a qualcosa che già comprendiamo, altrimenti non ci interesserebbe.

Seguire il proprio interesse è l’unico modo per dare al testo una possibilità concreta. Iniziare dalla prima pagina significa correre il rischio di scoraggiarsi a pagina 2.

Bill Thurston

Non si tratta solo dei libri di matematica. Ci sono altri libri che non leggiamo mai dall'inizio. Avete mai letto il libretto di istruzioni del vostro tostapane?

Probabilmente non l'avete fatto. Forse l'avete aperto con un gesto automatico quando avete disimballato il tostapane, ma quasi di sicuro non l'avete mai letto con attenzione. A meno che, naturalmente, non abbiate avuto un problema con il tostapane, nel qual caso avete saltato l'introduzione e siete andati direttamente alla pagina che vi interessava di piú *in quel preciso momento*.

Paragonare i testi matematici ai manuali dei tostapane può sembrare uno scherzo, ma è un'idea molto profonda. La dobbiamo a Bill Thurston.

Bill Thurston, nato nel 1946 e morto nel 2012, è uno dei matematici piú affascinanti degli ultimi tempi. Il suo lavoro in geometria, di eccezionale profondità e originalità, è stato un passo fondamentale per la dimostrazione della famosa congettura di Poincaré, completata da Grigorij Perel'man nel 2003.

Questo lavoro gli è valso la medaglia Fields nel 1982. Insieme al premio Abel, la medaglia Fields è il premio piú prestigioso della matematica.

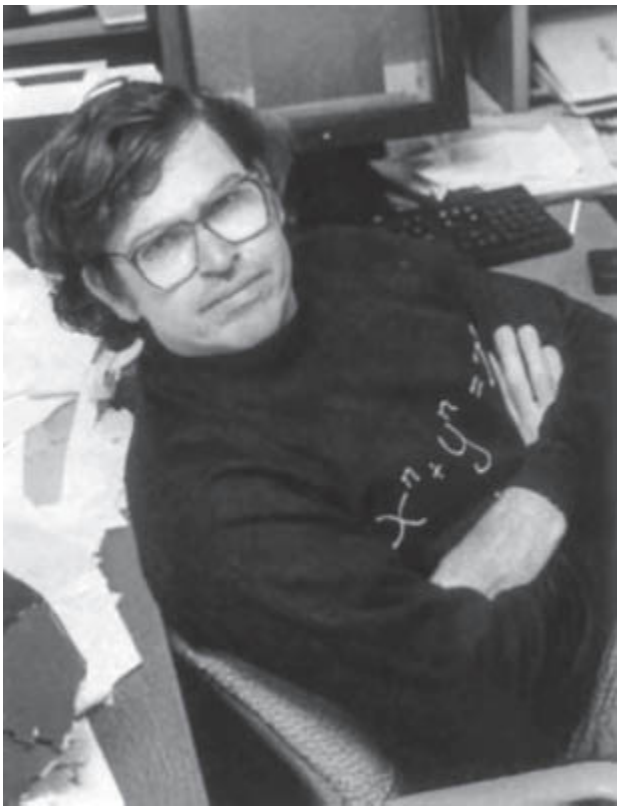
Thurston è senza dubbio il piú grande geometra del XX secolo, ma non solo. Non è facile riassumere in poche parole la particolarità del suo pensiero, la sua apertura mentale, la sua umanità e la sua sconfinata curiosità.

Che io sappia, nessun altro matematico di spicco ha collaborato alla progettazione di una collezione di alta moda per Issey Miyake.

Nel 1994, Thurston pubblicò sul *Bulletin of the American Mathematical Society* un articolo di venti pagine, «On Proof and Progress in Mathematics»[1], che descrive le sue intime motivazioni come matematico e i processi mentali coinvolti nel suo lavoro.

Thurston ci dice che quando legge una ricerca in un campo che gli è familiare, non la legge mai veramente. Preferisce concentrarsi sui «pensieri tra le righe».

Una volta che ha un'idea chiara, il formalismo e i dettagli della scrittura sembrano improvvisamente inutili e superflui: «Per me, sarebbe piú facile riscrivere tutto che cercare di capire cosa hanno effettivamente scritto gli autori».



«È come il nuovo tostapane con un libretto d'istruzioni di sedici pagine», prosegue. «Se già conoscete i tostapane, se questo assomiglia ai tostapane che avete già avuto, attaccherete la spina e vedrete se funziona, invece di iniziare a leggere tutti i dettagli nelle istruzioni».

Vale la pena insistere sulla metafora.

Thurston dice che le istruzioni sono inutili se si sa già cos'è un tostapane. Ma se non avete idea di cosa sia un tostapane, le istruzioni saranno veramente utili?

Probabilmente sarete contenti di sapere che non bisogna metterci le dita dentro e che non bisogna usarlo mentre si fa il bagno, ma le istruzioni sulla sicurezza che il manuale vi dice di LEGGERE ATTENTAMENTE PRIMA DELL'USO non serviranno a risolvere il grande enigma del tostapane; dunque, a cosa possono servire?

Non ho trovato le istruzioni del mio tostapane, ma ho trovato quelle dell'aspirapolvere. Il libretto è lungo sessantaquattro pagine e in nessun punto spiega a cosa serve un aspirapolvere. In altre parole, se dovessimo affidarci esclusivamente alla letteratura ufficiale, avremmo enormi problemi con l'aspirapolvere. Ci sarebbero *pochi bravi utilizzatori* di aspirapolvere

(quelli che hanno scoperto per caso cosa farne) e tutti gli altri sarebbero dei *negati* in fatto di aspirapolvere. Lo accetteremmo con fatalismo.

Il significato nascosto dell'aspirapolvere non si trova nelle istruzioni. È un segreto che ci tramandiamo per tradizione orale.

Ma questa legge fondamentale dell'apprendimento, che si applica sia all'aspirapolvere sia alle teorie matematiche, resta oscura e marginale.

Una lingua diversa da quella degli umani

I testi matematici non sono scritti nel linguaggio degli umani. È questo che li rende cosí difficili da leggere.

Il linguaggio ufficiale della matematica non funziona come la lingua che parliamo e nessun essere umano sarà mai perfettamente bilingue. Questo linguaggio artificiale è un'invenzione puramente umana – probabilmente una delle piú grandi invenzioni della nostra lunga storia – concepita per superare i limiti della lingua che parliamo.

La sua caratteristica principale è quella di sostituire il nostro modo abituale di definire le parole con un approccio radicalmente differente.

Nella vita di tutti i giorni, non definiamo mai correttamente le parole che usiamo. Le impariamo in base a degli esempi. Il modo migliore per spiegare cosa sia una banana è mostrarne una. Questo approccio funziona abbastanza bene, ma pone anche delle difficoltà reali, la piú concreta delle quali è la seguente: quando qualcosa esiste solo nella nostra mente, come si fa a descriverla?

A un livello molto profondo, la matematica è l'unico tentativo riuscito dell'umanità di parlare con precisione di cose che non possiamo descrivere. Questo è uno dei temi centrali del libro e vi torneremo a piú riprese.

In un testo matematico, i passaggi piú importanti non sono né i teoremi né le dimostrazioni: sono le definizioni. Il linguaggio matematico funziona come un gioco di costruzioni in cui le parole sono realmente *definite*, vale a dire costruite a partire da altre parole che sono state a loro volta precedentemente definite. Non potendo indicare qualcosa come fosse un oggetto, definire è il modo giusto per procedere.

Da questa prospettiva, il significato delle parole si riduce interamente alla loro definizione. Le parole non sono altro che gusci astratti che non significano assolutamente nulla se non ciò che le definisce: se avere una

proboscide fa parte della definizione di elefante, allora un elefante a cui viene tagliata cessa immediatamente di essere un elefante.

Il formalismo logico è talmente incapace di adattarsi a situazioni nuove da risultare assurdo. Non vogliamo pensare cosí e, anzi, non ne siamo capaci. Solo i robot e i computer possono funzionare in questo modo. Ma noi non siamo né robot né computer.

È questo il prezzo che dobbiamo pagare per parlare correttamente di cose invisibili. Anche se il formalismo logico ci è fondamentalmente estraneo, possiamo imparare a gestirlo, cosí come possiamo imparare a interagire con robot e computer, che ci infastidiscono, che troviamo ridicoli – eppure finiamo per abituarci alla loro psicologia e, a conti fatti, siamo ben felici di averli al nostro servizio.

Imparare a vedere

Capire la matematica significa imparare a trattare queste parole «guscio vuoto», definite dal formalismo logico, come se fossero parole del linguaggio ordinario. Significa imparare a riempire queste parole di un significato intuitivo e concreto. Significa *imparare a vedere* gli oggetti che definiscono come se fossero lí, davanti a noi. Ciò presuppone tecniche speciali, che descriveremo nei prossimi capitoli.

«Vedere» non è sempre la parola piú attinente, perché non tutte le cose concrete sono visive. Anche un sapore dolce, la *texture* di un materiale, un ritmo, una canzone, un odore familiare o la sensazione del tempo che passa sono esperienze concrete.

La capacità di associare percezioni fisiche immaginarie a concetti astratti è chiamata *sinestesia*. Alcune persone vedono le lettere come colori. Altri percepiscono i giorni della settimana come posizionati nello spazio che li circonda.

Una convinzione comune è che la sinestesia sia un fenomeno raro associato ad alcuni disturbi mentali. In realtà, si tratta di un fenomeno universale alla base della cognizione umana. Ecco un piccolo test per vedere se siete capaci di sperimentare sensazioni sinestetiche: quando guardate le lettere che compongono la parola «cioccolato», siete in grado di percepire un suono, un colore, un sapore? Quando guardate la sequenza di segni «999 999 999», avete la sensazione che esprima qualcosa di *grande*?

Ciò che è raro, perché la nostra cultura non ci incoraggia a farlo, è prendere coscienza della nostra capacità di sinestesia e cercare di svilupparla sistematicamente.

L'approccio matematico è una forma di yoga mentale che mira a recuperare il controllo sulla nostra facoltà sinestetica. Nulla di quello che sto dicendo dovrebbe sorprendervi, perché nulla è nuovo per voi. Grazie alla padronanza di questo yoga mentale avete imparato a «vedere» sulla pagina il numero 999 999 999 al posto di semplici linee di inchiostro. Ciò che siete stati in grado di fare nella prima infanzia dovreste essere in grado di farlo anche oggi.

Bill Thurston è stato uno dei piú grandi maestri di quest'arte di vedere. Nel capitolo 10 vi racconterò alcune delle cose che Thurston è riuscito a vedere. Cose talmente straordinarie che vi sarà difficile credermi. Abbiamo molto da imparare da lui.

Dagli umani, per gli umani

Ecco come la sua osservazione sul tostapane acquista pienamente senso. Quando un umano si trova di fronte a un testo matematico, la sfida non è quella di leggerlo dalla prima all'ultima riga, come farebbe un robot. La sfida è cogliere i «pensieri tra le righe», dare cioè un significato intuitivo alle parole usate e alle situazioni descritte.

Ma i testi matematici non sono scritti da robot, per robot. Sono scritti da esseri umani, per esseri umani. Senza la nostra capacità di dargli un senso, senza i «pensieri tra le righe», non ci sarebbero testi matematici, esattamente come, per lo stesso motivo, senza musica non ci sarebbero spartiti musicali.

Il modo migliore per condividere questa capacità di comprensione umana è la comunicazione diretta tra esseri umani. Questa comunicazione *sulla matematica* avviene *nel linguaggio degli umani*. Come racconta Thurston, la comunicazione non è mai cosí efficace come quando si parla a tu per tu: «Quando si parla da persona a persona, la gente utilizza canali di comunicazione che vanno ben oltre il linguaggio matematico formale. Fanno gesti, disegnano figure e diagrammi, emettono suoni, usano il linguaggio del corpo».

Quando si è appena dimostrato un nuovo e importante teorema, Thurston nota che spesso la soluzione può essere spiegata «in pochi minuti» nel corso di una conversazione privata tra due esperti della materia, ma per spiegare lo stesso risultato in una presentazione pubblica a degli specialisti ci vuole «un'ora». E comunicare questo risultato per iscritto richiede un articolo di «quindici o venti pagine», che lo stesso studioso impiegherà «diverse ore o giorni» a capire.

Passare dall'ordine di grandezza dei minuti a quello dei giorni, vuol dire dilatare di cinquecento volte il tempo necessario. Nella vita reale è ancora peggio, perché ci scoraggiamo.

Il fluido magico

La comprensione matematica non è un fluido magico che si trasmette con l'imposizione delle mani, ma qualcosa di molto simile. Quando si vuole capire un concetto matematico, la via piú breve è quella di discutere liberamente con qualcuno che ne capisce davvero.

I matematici professionisti lo sanno bene. Il loro vero problema è la difficoltà di comprensione della matematica. Hanno esattamente lo stesso problema di chi non capisce niente di matematica, ma conoscono la soluzione.

Quando ero un dottorando, non sono passato a livelli piú alti di comprensione leggendo libri. Ciò che sono poi riuscito a ottenere nel corso della mia carriera lo devo alle conversazioni con Raphaël. È stata una grande opportunità trascorrere tanto tempo con una persona cosí brava e cosí generosa da mettere a disposizione il suo tempo.

Le spiegazioni di Raphaël non sono mai state rigorose. A volte erano sbagliate, ma sono sempre state semplici e umane. Avevano un senso. Mi hanno stimolato. Raphaël mi spiegava *il vero significato di un teorema*. Mi raccontava come era stata inventata un'idea e come doveva essere compresa in senso «morale».

Comprendere «moralmente» qualcosa significa essere in grado di spiegarla a sé stessi in modo intuitivo e di illustrare la ragione per cui quella cosa è vera, e il senso morale di cui bisogna tener conto. Se la matematica non fosse altro che una questione di logica, questo problema non esisterebbe. Non c'è alcuna morale da trarre da un ragionamento logico.

Le spiegazioni morali supportate dalla gestualità lasciano deliberatamente delle zone d'ombra. Dicono a cosa servono i tostapane e come si mettono le fette di pancarrè, ma non fanno mai la lista dei singoli componenti di un tostapane. Se siete davvero interessati alla questione, potete consultare la definizione 7.4 a pagina 138.

L'importanza della conversazione diretta spiega l'organizzazione sociale e lo stile di vita della comunità matematica. Se gli astronomi hanno i telescopi, e i fisici hanno gli acceleratori di particelle, anche i matematici hanno il loro grande strumento scientifico: questo strumento è il viaggio.

I viaggi dei matematici permettono la diffusione di nuove idee con un'efficacia impossibile da raggiungere altrimenti. Questi viaggi sono spesso lunghi. Bisogna avere tempo per chiacchierare, prendere un caffè, scarabocchiare sulla lavagna per poi tornare alla discussione, il giorno dopo, con una domanda che ci è venuta in mente appena svegli. Proprio perché un matematico giapponese, Kyoji Saito, voleva capire i «pensieri tra le righe» dei miei articoli, mi invitava spesso a Kyoto. Da parte mia, mi ha aiutato a capire meglio i «pensieri tra le righe» dei suoi articoli. Questi viaggi fanno parte della vita dei matematici.

Chiaro e minaccioso

Nella stessa aula nella quale i negati in matematica soffrono in silenzio, c'è probabilmente un mago della matematica che potrebbe spiegare le cose con parole semplici. Perché non succede quasi mai?

Chi non capisce niente di matematica ha la certezza di non essere dotato, cosa che gioca un ruolo importante. È troppo inibito per fare le domande giuste, ovvero quelle veramente semplici, quelle che sembrano troppo stupide e che in realtà sono fondamentali.

Anche gli insegnanti hanno la loro parte di responsabilità. A volte alimentano l'illusione che la matematica possa essere limitata a ricette formali. Cosí come esiste un'incredibile differenza tra *chi capisce la matematica* e *chi no*, è altrettanto evidente l'incredibile differenza tra *i bravi insegnanti di matematica* e *i cattivi insegnanti di matematica*.

Proviamo a spiegarlo. Nel mondo matematico, i tostapane si presentano in pezzi staccati. Ognuno deve mentalmente costruirsi un'idea di tostapane. Il cattivo insegnante di matematica è quello che recita i 198 passaggi per

assemblare il tostapane e pretende che la storia si fermi lí. Il buon insegnante di matematica è quello che fa del suo meglio per spiegare cos'è un tostapane. Guarda costantemente i propri studenti negli occhi, perché è nei loro occhi che vedrà se hanno capito. Uno sta facendo un corso per robot, l'altro un corso per esseri umani.

Infliggere i 198 passaggi della costruzione del tostapane a qualcuno che non capisce dove si vuole arrivare è di una violenza inaudita. È come far crescere un bambino senza raccontargli delle storie.

Non credo che i cattivi insegnanti di matematica siano deliberatamente sadici. Forse non mettono la comprensione umana al centro della sfida matematica, perché loro stessi non hanno ricevuto un buon insegnamento. Forse non vedono il tostapane nella loro testa. O forse è il contrario: quando si vede troppo bene il tostapane nella propria testa, si tende a dimenticare che non tutti gli altri lo vedono.

«Ciò che è mentalmente chiaro per una persona è minaccioso per un'altra», scrive Thurston.

La difficoltà di condividere le immagini mentali, la loro natura evanescente e profondamente soggettiva, l'incapacità del nostro linguaggio di trascriverle con precisione e la tendenza della nostra intuizione a sbagliare sono proprio le ragioni che hanno portato all'invenzione del formalismo logico.

Per Thurston, come per tutti i matematici, la matematica è un'esperienza sensuale e carnale che precede il linguaggio. Il formalismo logico è il cuore del dispositivo che rende possibile questa esperienza. I libri di matematica sono illeggibili, ma ne abbiamo comunque bisogno. Sono uno strumento che ci permette di condividere per iscritto la vera matematica, l'unica che conta davvero: la matematica segreta, quella che è nella nostra mente.

Ma resta da sciogliere un grosso enigma.

Come si può trovare il coraggio e la voglia di scrivere libri illeggibili, indifferenti ai lettori e aridi come le istruzioni del tostapane? Cos'altro può dargli un senso? In quale stato mentale avviene la creazione matematica?

Questo è l'argomento del prossimo capitolo.

7. *La postura del bambino piccolo*

«Mio caro Serre, grazie per i vari documenti che mi hai generosamente inviato e per la tua lettera. Niente di nuovo da parte mia. Ho finito il noioso saggio di algebra omologica».

Cosí inizia una lettera scritta da Alexander Grothendieck, indirizzata a Jean-Pierre Serre, del 13 novembre 1956. Il tono disinvolto può sorprendere, ancor piú se si sa chi è Serre, chi è Grothendieck e di cosa parla la lettera[1].

Jean-Pierre Serre è uno dei piú grandi matematici del XX secolo. Una carriera non si misura certo in base alle onorificenze che si ricevono, ma riceverle tutte deve per forza voler dire qualcosa. Serre fu insignito della medaglia Fields nel 1954, all'età di 27 anni, un record di precocità ancora oggi ineguagliato. Il premio è riservato a ricercatori e ricercatrici di matematica sotto i quarant'anni e, per molto tempo, non c'è stato nulla di equivalente che rendesse omaggio a un'intera carriera matematica. Il premio Abel è stato creato nel 2003 con questo obiettivo. Quell'anno, la commissione incaricata di assegnarlo aveva una grande responsabilità: tra tutti i matematici viventi, doveva scegliere quello che meritava di riceverlo per primo, e decise di assegnarlo a Serre.

Grothendieck non è solo un grande matematico. Molto prima della sua morte, nel 2014, era diventato una leggenda. È uno di quei rari matematici – pochi nella storia – il cui contributo non si limita a risultati profondi o a teorie straordinarie. Grothendieck ha inventato un modo di affrontare le questioni matematiche cosí nuovo e cosí fecondo che è come se avesse cambiato la natura stessa della matematica.

Per questo motivo è spesso considerato il piú grande matematico del XX secolo, per il senso che può avere questa espressione.

Per quanto riguarda il «noioso saggio di algebra omologica», si tratta dell'articolo intitolato «Some Aspects of Homological Algebra» apparso nel 1957 sul *Tohoku Mathematical Journal*, una rivista scientifica giapponese.

L'articolo segnò l'ingresso di Grothendieck nel campo di ricerca che lo avrebbe reso famoso. Sotto l'influenza di Serre, era stato appena introdotto alla geometria algebrica. I due giovani formarono uno dei sodalizi matematici piú fecondi della storia. Del suo incontro con la geometria algebrica, Grothendieck dirà in seguito di aver avuto l'impressione di «trovarsi improvvisamente in una specie di ricca e lussureggiante "terra promessa"».

Grothendieck dedicherà quindici anni a descrivere questa terra promessa. La scrittura è al centro del suo metodo. Arriverà a dichiarare che «fare matematica è soprattutto *scrivere*».

Questa passione per la scrittura rende la lettera a Serre profondamente enigmatica. Poiché il «noioso saggio» non è che l'inizio del viaggio di Grothendieck proprio verso quella terra promessa. All'epoca della lettera, Grothendieck trovava la scrittura cosí noiosa che la chiusura di quel lavoro, al quale aveva dedicato oltre un anno, è rubricata come un non evento: «Da parte mia, niente di nuovo».

Con queste esatte parole, Grothendieck annunciava di aver appena concluso la stesura di un articolo storico.

Stava scherzando? Probabilmente no. In un'intervista del 2018, Serre racconta che una delle peculiarità di Grothendieck era proprio la sua totale mancanza di umorismo: «Non ricordo di averlo mai sentito ridere. Con lui, ad esempio, sulla matematica non si poteva scherzare»[2].

Dietro questo apparente paradosso si nasconde una profonda verità sulla natura del lavoro matematico. Il distacco e la noncuranza di Grothendieck possono sembrare incomprensibili, ma se si approfondisce il suo percorso intellettuale, ci si rende conto che tutto ha perfettamente senso.

Una battuta un po' al limite

Tra il grande pubblico, tutti sanno chi è Einstein, ma pochi conoscono Grothendieck.

Il paragone non è affatto assurdo. Einstein ha rivoluzionato il modo in cui i fisici pensano allo spazio e al tempo. Grothendieck ha rivoluzionato l'idea che i matematici hanno della nozione di spazio. Si è spinto fino a reinventare la nozione stessa di punto e a offrire una prospettiva geometrica sul concetto di verità.

Alcuni matematici ritengono addirittura che il paragone con Einstein non sia corretto. Trovano il lavoro di Einstein bello, elegante, brillante, ammirevole. Pensano che sia l'opera di una persona molto intelligente. Quanto al lavoro di Grothendieck, lo trovano straordinario, vertiginoso, sublime e inquietante. Ma pensano che non possa essere opera di un essere umano. Le idee di Grothendieck non sono sempre facili da capire, ma quando se ne comprende anche solo un frammento, appare subito incredibile che qualcuno possa aver avuto idee di questo tipo.

Lo stesso Jean-Pierre Serre non esita a dire che non sarebbe stato in grado di elaborare un'opera come quella di Grothendieck, perché «richiede una forza enorme». Quando Serre parla di Grothendieck, parla della «potenza della sua testa» e la descrive come una forza soprannaturale: «È stato straordinario, sia intellettualmente che fisicamente. Non conosco nessuno che abbia avuto tanta forza. Conosco persone molto forti intellettualmente, ma Grothendieck è una forza animale»[3].

Grothendieck non la pensava cosí. Non pensava di essere particolarmente dotato. La sua straordinaria creatività non nasceva da particolari capacità: «Questo potere non è affatto il privilegio di possedere

“doni” straordinari, di una potenza cerebrale (per cosí dire) fuori del comune. […] Tali doni sono certamente preziosi, e sicuramente capaci di suscitare invidia in chi (come me) non è nato con questi talenti».

Grothendieck dà una spiegazione completamente diversa: «La qualità dell’immaginazione e della creatività di un ricercatore è la qualità della sua attenzione, in ascolto della voce delle cose».

Sembrano le stesse parole di Einstein, il nostro punto di partenza all’inizio del capitolo 1: «Non ho doni particolari, sono solo appassionatamente curioso».

Ma Grothendieck si spinge oltre. Eppure, sa che nessuno gli crederà, perché affermazioni del genere non vengono mai prese sul serio: «Quando osi dire queste cose, ricevi a destra e a manca gli stessi sorrisi, un misto di imbarazzo e accondiscendenza, tanto dall’ignorante che sa di esser tale, quanto dal sapiente convinto di esserlo molto al di sopra dell’uomo».

Einstein aveva la fama di essere un burlone. Con Grothendieck si può stare tranquilli: non scherzava mai.

È un peccato che quella famosa conversazione con Einstein non ci sia mai stata: ci avrebbe svelato i segreti della sua creatività, avrebbe accettato di rispondere alle nostre domande e sarebbe entrato nei dettagli di *come fa in pratica*.

Grothendieck, invece, ha scritto un testo di oltre mille pagine sull’argomento, in cui esso descrive con precisione ciò che accade nella sua mente quando fa matematica. Ammette di essere completamente incapace di leggere qualsiasi testo matematico, anche semplice, finché non riesce a crearsi le giuste immagini mentali. Ammette anche la sua incapacità di seguire le conferenze, perché vanno sempre troppo veloci per lui. Spiega il suo modo di affrontare la sensazione di non capire nulla. E, soprattutto, spiega nei dettagli cosa gli dà piacere nel fare matematica.

Questa straordinario racconto si intitola *Récoltes et semailles*. Il manoscritto è rimasto a lungo inedito. È circolato ufficiosamente per oltre trentacinque anni e solo nel 2021 un editore ha deciso di pubblicarlo[4].

Una testimonianza straordinaria

«Ciò che guida e domina il mio lavoro, ciò che ne è l’anima e la ragion d’essere, sono le immagini mentali che si formano nel corso del lavoro per

cogliere la realtà delle cose matematiche».

«Per tutta la vita non sono riuscito a leggere un testo matematico, per quanto banale o elementare, perché non ero in grado di dargli un “senso” nei termini di una personale esperienza delle cose matematiche, ovvero quando questo testo non mi suscita immagini mentali, intuizioni che gli diano vita».

Questi paragrafi, come tutti quelli qui citati, sono tratti da *Récoltes et semailles*.

Il racconto di Grothendieck è un lungo monologo con toni profetici, affascinante ma disorientante. Non posso davvero consigliarvi di leggerlo. Almeno non senza un serio avvertimento: è un testo mostruoso, lungo e difficile, a volte brillante e a volte confuso, pieno di metafore e allegorie, costellato di note e di chiose, che a loro volta hanno note a piè di pagina. Per centinaia di pagine, si smarrisce tra risentimenti personali e recriminazioni infondate e diventa francamente illeggibile.

È un testo per iniziati, e gli stessi addetti ai lavori trovano molto difficile arrivare alla fine.

A detta di tutti, però, *Récoltes et semailles* è il racconto piú sorprendente sull’esperienza del fare matematica che sia mai stato scritto. Come molte mie amiche e molti miei amici matematici, ho trovato passaggi straordinari per chiarezza e precisione.

Piú di una volta ho interrotto la lettura per dirmi: «Ha ragione. È esattamente cosí. È proprio questo il segreto. È proprio questo che ci passa per la testa. È proprio facendo questi gesti mentali molto semplici, gesti che sembrano innocenti ma che nessuno pensa di fare, che si diventa molto bravi in matematica. Non ho mai letto niente di cosí importante. Bisognerebbe riuscire a spiegare a tutti ciò che racconta Grothendieck».

So, tuttavia, che il pensiero di Grothendieck, allo stato originario, è troppo enigmatico per essere compreso al di fuori della ristretta cerchia degli specialisti.

Alla fine, è un po’ come il problema che abbiamo con Einstein. Ci manca la possibilità di avere una conversazione franca e diretta, di porgli semplici domande. Grothendieck si spinge piú in là di Einstein, ci fornisce dettagli incredibili. Ma per decifrare la sua testimonianza, dobbiamo rapportarla alla nostra esperienza concreta. *Récoltes et semailles* è un testo visionario ma esoterico, scritto troppo presto, in un’epoca non ancora pronta a ricevere questo messaggio, e da un uomo troppo isolato[5].

Prima di condividere con voi ciò che ho tratto da questa lettura, ciò che riverbera con la mia esperienza personale, devo raccontarvi qualcosa di piú sulla vita di Grothendieck e sulla sua personalità fuori del comune.

Un bambino selvaggio

Alexander Grothendieck nacque a Berlino nel 1928. I suoi genitori erano attivisti anarchici costretti all'esilio per sfuggire al regime nazista. Nel 1933, all'età di cinque anni, fu affidato dalla madre alla famiglia di Wilhelm Heydorn, un pastore luterano di Amburgo.

Fino a quel momento, Grothendieck sembra aver avuto un'educazione molto particolare, ispirata ai principi anarchici dei genitori. La madre adottiva, Dagmar Heydorn, lo descrisse al suo arrivo come un bambino selvaggio, sporco e senza alcuna forma di inibizione. Quando Hanka Grothendieck le affidò il figlio, chiese che non venisse mai mandato a scuola e che non gli venissero mai tagliati i capelli.

Gli Heydorn gli tagliarono i capelli e lo mandarono a scuola. Forse questo fu l'unico momento sereno e «normale» della sua esistenza. Rimase affettuosamente legato alla famiglia adottiva per il resto della vita.

Nell’aprile del 1939, temendo per la sua incolumità (il padre di Grothendieck era ebreo), gli Heydorn lo fecero salire su un treno per Parigi, dove si ricongiunse con i genitori in esilio. Suo padre fu arrestato poco dopo e morí ad Auschwitz nel 1942. Dal 1940 in poi, Grothendieck e sua madre vissero nei campi per rifugiati indesiderati nel sud della Francia.

La passione di Grothendieck per la matematica inizia a delinearsi. Il resto della storia assomiglia ai cliché dei film hollywoodiani. Nella Francia del dopoguerra, la madre e il figlio sono dei senza patria. Vivono ai limiti della povertà facendo le pulizie nelle case e vendemmiando. Il giovane studente viene notato da uno dei suoi insegnanti, che gli scrive una lettera di raccomandazione. Nel 1948, all’età di vent’anni, si trasferisce a Parigi e incontra alcuni dei piú grandi matematici dell’epoca.

Uno di loro gli fa leggere il suo ultimo lavoro di ricerca, che si conclude con un elenco di quattordici importanti problemi irrisolti. È il tipo di elenco dal quale uno studente ambizioso può pescare un buon argomento per la tesi: sceglie un problema, ci passa su tre anni, si fa aiutare dal suo relatore, risolve il problema a metà e tutti sono contenti. Grothendieck si mette a lavorare per conto suo e torna qualche mese dopo. Aveva risolto tutti e quattordici i problemi.

Fino al 1970, Grothendieck percorre tutte le tappe che da anonimo rifugiato lo portano ai vertici della scienza mondiale. Diviene il piú grande e il piú bravo. La sua capacità di lavoro è fenomenale. In omaggio alla sua figura viene creato un istituto di ricerca. Nel 1966 gli viene assegnata la medaglia Fields, ma è solo un dettaglio rispetto a tutto il resto. Grothendieck e i suoi studenti si lanciano in una ricostruzione titanica e visionaria della geometria algebrica, la cui eredità alimenta gran parte della ricerca matematica attuale.

Ma nel 1970, all’età di quarantadue anni, Grothendieck interrompe bruscamente la sua carriera scientifica, si dimette dall’istituto e inizia un nuovo periodo della sua vita, dedicato alla militanza e all’ecologismo radicale.

È a metà degli anni Ottanta, quindici anni dopo questa frattura, che scrive *Récoltes et semailles*. La sua intenzione è quella di scrivere un testo per il grande pubblico, perché pensa di essere depositario di un messaggio importante. In una lettera del 2010, ammette di non esserci riuscito del tutto: «Questa riflessione e questa testimonianza sulla mia vita di

matematico, per quanto illeggibile, lo ammetto, ha un grande significato per me».

Dal 1991 fino alla sua morte nel 2014, Grothendieck si ritira dal mondo. Vive isolato nel piccolo villaggio di Lasserre, nell'Ariège, ai piedi dei Pirenei, dove pratica la meditazione e conduce un'esistenza estremamente solitaria e ascetica. Arriva al punto di cercare di nutrirsi solo con minestre di tarassaco.

Grothendieck non smette mai di scrivere. Ha lasciato un'immensa quantità di appunti matematici, filosofici e mistici, tra cui, pare, una meditazione di trentamila pagine sul «problema del Male».

La vicinanza dell'esperienza matematica a quella della follia è un argomento che non possiamo fingere di ignorare. Torneremo su questo argomento nel capitolo 17.

«Soli, in ascolto delle cose»

«La scoperta è una prerogativa dei bambini. È del bambino piccolo che voglio parlare, del bambino che non ha ancora paura di sbagliare, di sembrare stupido, di non essere serio, di non essere come tutti gli altri. Non ha nemmeno paura che le cose che guarda abbiano il cattivo gusto di essere diverse da come si aspetta che siano, da come dovrebbero essere».

Questo paragrafo di *Récoltes et semailles* suona come un'ovvietà già sentita centinaia di volte e chiaramente sbagliata. No, i bambini piccoli non sono grandi studiosi. E anche se fosse vero, che ce ne importa? Non saremo mai piú bambini.

Ma Grothendieck sta parlando in senso metaforico. Si riferisce al bambino che è presente «in noi» e con il quale «abbiamo perso il contatto». All'inizio del suo racconto, si rivolge direttamente al lettore con queste parole sorprendenti: «È a colui che in te sa stare da solo, al bambino, che vorrei parlare, e a nessun altro».

Per Grothendieck, la sua creatività fuori del comune nasce da un rapporto molto stretto con la sua parte infantile: «In me, per ragioni che non ho ancora pensato di esplorare, è sopravvissuta una certa innocenza».

Lo descrive come un «dono della solitudine», la capacità di ritrovarsi «soli in ascolto delle cose, intensamente assorbiti da un gioco da bambini».

«Cercare e trovare, ovvero interrogare e ascoltare, è la cosa piú semplice e spontanea del mondo, di cui nessuno ha l'esclusiva. È un "dono" che abbiamo tutti fin dalla culla».

Qualunque cosa si pensi di Grothendieck, delle sue stranezze, dei suoi modi eccentrici, delle sue bizzarre ossessioni, bisogna prendersi la briga di scavare. Nessuno è piú qualificato di lui per parlarci di questo argomento.

Récoltes et semailles assomiglia in diversi punti a un manuale di yoga e, in un certo senso, proprio di questo si tratta. Dietro le metafore e gli aneddoti personali, il testo descrive un modo particolare di tenere il corpo, un atteggiamento psichico molto preciso, un rapporto insolito con il linguaggio e con la questione della verità.

Grothendieck è un grande yogi che ha inventato una propria tecnica di meditazione, incentrata sulla ricerca di una forma radicale di curiosità e indifferenza al giudizio – quella che potremmo definire *la postura del bambino*.

Tutti i matematici sviluppano tecniche di questo tipo, ma raramente ne sono consapevoli e raramente sanno come spiegarle. Grothendieck, invece, ci fornisce le istruzioni per l'uso.

Questa postura psichica è ovviamente al centro del suo metodo di lavoro. In poche parole, ecco in cosa consiste.

«Non sono completamente convinto della mia affermazione»

Aprire un libro di matematica su un argomento del quale non si comprende nulla è un po' come sedersi nella cabina di comando di un aereo di linea o di una centrale nucleare. Ci sono molti quadri e pulsanti, non sapete a cosa servono e non volete fare errori. Vi piacerebbe molto capire come funziona, ma non ne avete idea. La reazione normale è quella di stare seduti giudiziosamente e non toccare nulla. Prima di toccare qualcosa, bisogna studiare e riflettere.

Ma se mettiamo un bambino di due anni in una cabina di pilotaggio, reagirà in modo diverso. Premerà tutti i pulsanti, a partire da quelli rossi e da quelli lampeggianti.

Il consiglio di Grothendieck è di fare come il bambino di due anni. Quando vuole capire qualcosa, ci prova direttamente, senza complessi,

come farebbe un bambino piccolo. Non aspetta di aver capito prima di iniziare. Ci prova senza pensare, va a naso:

«Quando sono curioso di qualcosa, che sia matematica o altro, la interrogo. Faccio la domanda senza preoccuparmi che sia stupida o che possa apparire tale, senza che sia stata ponderata con attenzione».

«Spesso la domanda prende la forma di un'affermazione – un'affermazione che, in verità, è un modo per tastare il terreno. Non sono completamente convinto della mia affermazione».

«Spesso, soprattutto all'inizio di una ricerca, l'affermazione è completamente sbagliata, anche se è stato necessario farla per convincersene».

È importante capire che cosa intende con *interrogare le cose*, *fare domande* e *tastare il terreno*.

In tutto il libro, Grothendieck descrive il lavoro matematico come una successione di attività fisiche reali. Ma cosa significa esattamente *interrogare le cose*? Se voglio interrogare le cose, cosa devo fare effettivamente? A ben guardare, l'espressione è misteriosa, quasi quanto l'espressione speculare usata anch'essa da Grothendieck: *mettersi in ascolto della voce delle cose*.

E già che ci siamo: che cos'è una «cosa matematica»? Dove possiamo incontrarla e come possiamo entrarci in comunicazione?

Grothendieck non si prende mai la briga di specificarlo, probabilmente perché è talmente abituato a dialogare con queste cose che ha dimenticato come anche lui abbia dovuto imparare a farlo.

Le cose matematiche sono quelle che i non matematici chiamano *nozioni* matematiche o *astrazioni* matematiche. Possono essere numeri, insiemi, spazi, forme geometriche di diversa natura o altri tipi di strutture astratte. Ai matematici piace chiamarle *oggetti* matematici, perché immaginare queste cose come oggetti concreti che si possono toccare ne facilita la comprensione.

«Interrogare le cose», «ascoltare la voce delle cose», significa cercare di immaginarle, esaminare l'immagine mentale che abbiamo di loro, cercando di concretizzarla, di definirla, di svelare piú dettagli, come quando cerchiamo di ricordare un sogno.

Il piacere di sbagliare

Questo approccio deve essere tradotto in termini concreti. Il linguaggio di *Récoltes et semailles* è cosí figurato che si potrebbe pensare che restare nell'indeterminatezza sia una scelta intenzionale.

È un'impressione sbagliata, Grothendieck si sforza di essere preciso. Il suo vocabolario enigmatico serve a risolvere un problema pratico: il testo parla dei gesti e delle immagini mentali che plasmiamo, ma il nostro linguaggio non ha parole adeguate. Non esiste un vocabolario specifico per parlare in modo semplice di questi gesti, di queste immagini. Nessuno si è preoccupato di dirci che abbiamo il diritto di parlarne.

La «postura del bambino» non è un'allegoria, è un preciso atteggiamento mentale.

Il principio di base è semplice ma rivoluzionario. È il tipo di idea a cui quasi nessuno pensa perché è troppo semplice e va contro i nostri istinti, ma ha esattamente il potenziale di cambiare tutto, a tutti i livelli dell'apprendimento matematico, compresi i principianti assoluti e i cosiddetti incapaci in matematica.

Quando scopriamo un nuovo concetto matematico, facciamo fatica a immaginarlo. Ci appare sotto forma di una definizione astratta, di una serie di parole sulla pagina o di parole pronunciate da un professore. Questa sequenza di parole, per noi, non ha alcun significato. Non evoca nulla.

Gli studenti di solito non si sentono autorizzati a immaginare oggetti matematici che non comprendono ancora. Sentono il bisogno di saperne di piú prima di avere il coraggio di vederli. Nel frattempo, si accontentano di decifrare. Non capiscono nulla, gli viene il mal di testa, ma si dicono che insistendo riusciranno a cogliere le informazioni piú importanti e che, cercando di farle proprie, alla fine riusciranno, forse, a capire. Solo che non funziona mai.

Grothendieck fa in un altro modo. Sa che non serve a niente accumulare informazioni su cose che non riusciamo a vedere. Al contrario, si permette di immaginare le cose fin da subito, senza aspettare, anche quando sa benissimo che non ci riuscirà e che il suo modo di immaginarle sarà clamorosamente sbagliato.

Non ha paura di sbagliare. Anzi, è certo che sbaglierà ed è esattamente quello che cerca.

Grothendieck cerca attivamente l'errore, proprio come un bambino piccolo cerca attivamente di fare cose stupide. Nel suo percorso alla scoperta del mondo matematico, ogni volta che percepisce qualcosa di

strano o intrigante, poco chiaro o insoddisfacente, incoerente o sgradevole, scava in quella direzione.

Quando sente che c'è qualcosa che non va nella sua visione del mondo, si sente a disagio. Scava per scoprire la fonte del suo disagio, perché è l'unico modo per alleviarlo. La scoperta dell'errore è fonte di piacere e sollievo.

«La scoperta dell'errore è uno dei momenti cruciali, un momento creativo assoluto, in qualsiasi lavoro di ricerca, sia esso in matematica o nella scoperta di sé. È un momento in cui la nostra conoscenza dell'oggetto indagato ha un improvviso risveglio».

Ciò che Grothendieck scrive a proposito dell'errore ha una portata universale e va ben oltre il campo scientifico. Si avrebbe voglia di scolpire questa frase sulla facciata delle scuole:

> La paura dell'errore e la paura della verità sono esattamente la stessa cosa. Chi teme di sbagliare è incapace di scoprire. È quando abbiamo paura di sbagliare che l'errore che è in noi diventa inamovibile come una roccia.

Pochi sanno che in matematica i principali ostacoli sono di natura psicologica, non solo all'inizio, ma lungo tutto il percorso, fino ai piú alti livelli scientifici. Quando usciamo dall'infanzia, impariamo ad avere paura di sembrare stupidi. Impariamo a vergognarci dei nostri errori. Impariamo a nascondere, anche a noi stessi, il fatto che non capiamo quasi nulla. Per progredire in matematica, dobbiamo imparare a disattivare questo riflesso di dissimulazione. Ed è molto difficile.

Nell'epoca in cui eravamo ancora liberi di fare domande stupide, anche di fare la stessa domanda stupida cento volte di seguito, non esistevano gli incapaci in matematica. I grandi matematici inventano e mettono in atto tecniche speciali per ritrovare quell'innocenza infantile. Tutti affermano che è indispensabile. Torneremo su questo punto nel capitolo 13.

Una storia di plasticità

L'«errore che è in noi» di cui parla Grothendieck non ha nulla a che fare con la logica. Non si tratta di un errore di calcolo, né di un errore di ragionamento. L'errore di cui parla Grothendieck è un errore di intuizione, un errore di visione: l'immagine che abbiamo delle cose non è quella giusta.

Come vedremo nel corso del libro, la posta in gioco nella comprensione della matematica è cambiare gradualmente il modo in cui concepiamo le cose, per renderlo piú chiaro, piú accurato e piú conforme alla realtà.

A volte si dice che i due emisferi del nostro cervello funzionino in modo diverso. Il cervello sinistro sarebbe specializzato nel ragionamento logico e nel calcolo, mentre il cervello destro sarebbe specializzato nel ragionamento associativo e intuitivo.

È un'assurdità. Questa interpretazione fantasiosa della nostra anatomia risale agli anni Sessanta e successivamente è stata smentita. In realtà, le due metà del cervello sono molto simili e, a un livello profondo, il loro funzionamento è di tipo associativo e intuitivo. L'organo che permette di comprendere il mondo in modo logico non esiste. Se contate su un organo simile per progredire in matematica, potete aspettare a lungo.

La nostra straordinaria capacità di apprendimento e di invenzione è radicata nella plasticità mentale, vale a dire nella capacità inconscia di riconfigurare costantemente la rete di associazioni di immagini e di sensazioni che, letteralmente e figurativamente, è la vera struttura del nostro cervello e del nostro pensiero.

La plasticità mentale interviene ogni volta che apprendiamo qualcosa di fondamentale nella nostra vita. Gli errori svolgono un ruolo fondamentale in questo senso: sono il motore della plasticità. Imparare a vedere, a camminare, a usare un cucchiaio, ad allacciarsi le scarpe, a parlare, a leggere e a scrivere è sempre una questione di riconfigurazione del cervello. Non succede mai con un solo tentativo. Un bambino non sa come camminare finché non prova e fallisce. Ha bisogno di cadere per imparare ad alzarsi. È l'accumulo di errori che gli permette di sviluppare gradualmente un senso intuitivo dell'equilibrio.

Come tutti gli apprendimenti psicomotori, la comprensione di una nuova nozione matematica richiede una riconfigurazione dell'intuizione, e questo implica una fase di tentativi. Riformulate nel contesto della progressione dell'apprendimento, le parole di Grothendieck sul ruolo dell'errore diventano illuminanti:

> La paura di cadere e la paura di camminare sono la stessa identica cosa. Chi teme di sbattere il naso non può imparare a camminare. È quando stiamo seduti sulle nostre chiappe che la goffaggine iniziale si trasforma in un handicap psicomotorio.

Il ruolo della logica

Nel mondo delle immagini mentali, le leggi della fisica non si applicano. Possiamo immaginare qualsiasi cosa, anche cose incoerenti, senza sbattere la faccia. L'errore che è in noi può diventare solido come una roccia, senza che ce ne rendiamo conto.

È qui che l'approccio matematico diverge dal nostro modo abituale di usare l'intuizione. I matematici hanno inventato un metodo per scoprire gli errori che sono in noi. Questo metodo si basa sulla scrittura, piú precisamente sulla scrittura nel linguaggio ufficiale della matematica, costruito intorno al formalismo logico.

La logica non serve per pensare. Serve a scoprire dove pensiamo male.

Quando Grothendieck «tasta il terreno» per interrogare gli oggetti che vuole capire, è la scrittura a dargli la risposta.

«Spesso bastava scriverlo perché saltasse all'occhio che qualcosa era falso, mentre prima di metterlo nero su bianco, al posto di questa evidenza, c'era una sfocatura, una sorta di inquietudine».

«Questo permette di tornare alla carica con un po' di ignoranza in meno, con una domanda-affermazione che forse è un po' meno fuori bersaglio».

A differenza di un biologo che scrive un articolo *dopo* aver terminato i suoi esperimenti, un matematico scrive *durante* il suo lavoro di ricerca, perché la scrittura *è* il suo lavoro di ricerca. Ecco cosa dice Grothendieck al riguardo:

«Il ruolo della scrittura non è quello di documentare i risultati di una ricerca, ma il processo della ricerca stessa».

«Non mi sono mai risparmiato per definire, attraverso il linguaggio matematico e nel modo piú meticoloso possibile, queste immagini e l'apprensione che generano».

«È in questo continuo sforzo di formulare l'inespresso, di chiarire ciò che è ancora vago, che forse si trova la dinamica particolare del lavoro matematico (e forse anche di tutto il lavoro intellettuale creativo)».

La scrittura matematica è il lavoro di trascrizione di un'intuizione viva (ma confusa, instabile, non verbale) in un testo preciso e stabile (ma cosí morto da sembrare un fossile).

O meglio, sarebbe un semplice lavoro di trascrizione se l'intuizione fosse precisa e corretta fin dall'inizio. Ma l'intuizione non è mai subito precisa e corretta. All'inizio, il processo intuitivo è vago e fallace e, in

effetti, rimane sempre tale in una certa misura. A mano a mano che il lavoro di scrittura procede, l'intuizione diventa sempre meno sfocata e sempre meno fallace. Questo processo è lento e graduale.

La creazione matematica è un costante avanti e indietro tra uno sforzo di immaginazione (per vedere le cose) e uno sforzo di verbalizzazione (per mettere in parole ciò che vediamo).

Questo processo modifica sia la nostra intuizione sia il nostro linguaggio.

Impariamo a vedere nello stesso momento in cui impariamo a parlare. Impariamo a vedere cose nuove e inventiamo il linguaggio che ci permette di nominarle, questo nuovo linguaggio che, per Grothendieck, «si tratta di condensare da un apparente nulla di nebbie impalpabili».

Il risultato di questo lavoro si incarna in due differenti aspetti. Il primo è invisibile: è la trasformazione della comprensione del mondo e dello stato di coscienza della persona che ha prodotto la ricerca. Il secondo è il testo matematico.

Grothendieck sa che questa seconda espressione, il «lato linguistico», è l'unico risultato visibile e condivisibile. Ma non è questo che guida il suo approccio. Per lui, «non è in questo aspetto che risiede l'anima della comprensione delle cose matematiche».

Lo sforzo di scrivere permette a Grothendieck di sviluppare la propria intuizione. Una volta che ha le idee chiare, guarda i suoi articoli con distacco, come se fossero le istruzioni di un tostapane.

Il fastidioso diplodoco

Nel prossimo capitolo vedremo come il particolare funzionamento del linguaggio matematico lo renda un prodigioso strumento di chiarificazione mentale.

Ma concludiamo questo capitolo tornando all'enigma da cui siamo partiti: il tono disinvolto della lettera che il giovane Grothendieck, allora ventottenne, inviò a Serre il 13 novembre 1956 per dirgli che aveva appena terminato il suo «noioso saggio».

Nel giugno del 1955, diciassette mesi prima, Grothendieck aveva scritto a Serre per condividere con lui i suoi primi appunti. Il tono era entusiasta, dato che Grothendieck era nella fase iniziale della scoperta. Lanciava

«sonde», faceva errori enormi e progrediva rapidamente. All’epoca, si riferiva ancora ad alcuni passaggi dei suoi appunti come a «uova non deposte», che forse stavano «facendo casino».

Nell’anno successivo, Grothendieck cova le sue uova. Osserva la schiusa e poi nutre la strana creatura che emerge. A mano a mano che il manoscritto cresce e diventa piú strutturato, Serre e Grothendieck ne parlano con sempre maggiore disinvoltura, arrivando persino a dargli un soprannome: il «diplodoco».

Le grandi idee sono già pronte. Il piacere della scoperta, cioè il piacere di avere finalmente capito al termine di una ricerca, sta già svanendo. Le sorprese si fanno rare. Ora è solo una questione di rifinitura, di dettagli tecnici, di conformità ai requisiti quasi burocratici del linguaggio ufficiale della matematica.

Negli ultimi mesi di stesura, la scrittura diventa un calvario. Grothendieck si preoccupa di chi vorrà pubblicare il suo fastidioso diplodoco. Ha scelto la rivista giapponese *Tohoku Mathematical Journal* perché «sembra che non siano scoraggiati da articoli fiume».

Nella sua lettera del 13 novembre 1956, Grothendieck addirittura si scusa. Aveva creato un mostro, ma non aveva scelta: «È l’unico modo che ho per capire, a forza di insistere, come funzionano le cose».

8. *La teoria del tatto*

Nella famiglia dei libri che non si leggono mai veramente, oltre ai libri di matematica e alle istruzioni del tostapane, non possiamo dimenticare i dizionari.

Da bambino ero affascinato dai dizionari. La loro promessa è di definire ogni parola a partire da altre parole. Ma è una promessa che può essere mantenuta? Possono davvero servire come porta d'accesso alla scoperta delle lingue? Quando vuoi imparare le parole partendo da zero, da quale pagina bisogna iniziare?

Se non sai cos'è una *banana*, il dizionario ti dirà che è il «frutto commestibile dell'albero del banano, di forma allungata, prima verde e poi giallo con macchie nere quando è maturo, con polpa farinosa». Ma che cos'è un *banano*? Si tratta di una «pianta monocotiledone della famiglia delle Musacee, erbacea e arborescente, il cui frutto è la banana».

Non è sbagliato, ma non ti accende chissà quale interesse. La definizione è stranamente tortuosa e complicata e, soprattutto, è circolare: la banana è il frutto dell'albero di banane, che ha come frutto la banana. Quindi potremmo anche risparmiarci questo inseguirsi di definizioni tecniche e dire semplicemente che una banana è una banana, se questo è il messaggio principale.

Non si può spiegare una banana a qualcuno che non sa cosa sia con frasi contorte.

Per esporre con sincerità la nostra idea di banana, la definizione piú semplice e onesta è ancora quella che diamo ai bambini: «Vedrai, è buona!»

Il dizionario è pieno di definizioni circolari.

Che cos'è il *calore*? «La qualità di essere caldo, la sensazione prodotta da un corpo caldo». Cosa significa *caldo*? «Di temperatura superiore al

normale, di temperatura elevata». Che cos'è la *temperatura*? «Il grado di calore o di freddezza di un corpo o di un ambiente».

Che cos'è la *verità*? «Carattere di ciò che è vero». E cos'è *vero*? «Ciò che è conforme alla verità».

Sul piano logico, i dizionari sono schemi Ponzi. Se davvero dovessimo affidarci a loro per imparare cos'è una banana, o il calore, o la verità, la frode sarebbe stata smascherata molto tempo fa.

Ma non facciamo cosí. Il nostro approccio non è logico. Non impariamo le parole attraverso la loro definizione. Assimiliamo il linguaggio per assorbimento graduale, per chiarimenti successivi. Il nostro cervello ha la capacità di vedere le cose prima di poterle nominare, di riconoscere le parole prima di capirne il significato e di associare gradualmente le parole a ciò che vediamo.

Partiamo da zero, letteralmente. Non partiamo dai dizionari. Partiamo dalla vita, vale a dire dall'esperienza comune che condividiamo con gli altri.

Iniziare da zero

Le definizioni matematiche assomigliano a quelle dei dizionari, con una differenza: definiscono davvero. Al contrario dei dizionari, i testi matematici non si accontentano di mettere in relazione parole che già esistono. Non si limitano a cose che possiamo indicare o di cui condividiamo un'esperienza comune.

Una definizione matematica non è né un commento né una spiegazione: è la guida all'assemblaggio preciso di una nuova immagine mentale e il certificato di nascita della nuova parola con cui scegliamo di designarla. (In pratica, riutilizziamo una parola esistente per attribuirle un nuovo significato, che potrebbe non avere una relazione diretta con il significato di quella parola nel linguaggio quotidiano.)

In questo senso, le definizioni matematiche hanno un potere creativo: fanno esistere le cose. Può sembrare ridicolo parlarne in modo cosí pomposo, ma la questione è proprio questa. Quando vedi cose che gli altri non vedono ancora, condividerle significa farle esistere nella loro testa.

L'approccio è semplice: spieghiamo agli altri come partire dalle cose che sono già in grado di vedere per costruire mentalmente nuove cose e

imparare progressivamente a vederle.

Un enorme fattore di espansione

In teoria, tutti dovrebbero essere in grado di leggere testi matematici. A differenza dei dizionari, non contengono definizioni circolari. Non è richiesta alcuna conoscenza implicita e, quando necessario, il lettore viene rimandato a riferimenti precedenti dove può trovare la definizione di parole che ancora non conosce. Se le istruzioni sono chiare e si forniscono tutti i dettagli, non dovrebbero esserci ostacoli alla comprensione.

Tuttavia, nella pratica, fin dalle prime righe di scrittura di un testo matematico, ci si trova di fronte a un problema gigantesco: spiegare un'immagine mentale a parole è terribilmente difficile.

«A volte c'è un enorme fattore di espansione per poter tradurre il mio modo di pensare in qualcosa che possa essere comunicato a qualcun altro» osserva Thurston.

Il risultato è spesso indigesto. Quando Thurston parla di un «enorme fattore di espansione», non intende dire che ci vorrà il doppio o il triplo del tempo: intende dire che la trascrizione di ciò che ci sembra evidente può essere dieci, cento o mille volte piú lunga del riassunto che faremmo a livello mentale. E comunque, tralasciamo sempre molti dettagli che non avremo mai il coraggio di riportare. Il fenomeno descritto da Thurston non è affatto limitato alla ricerca di alto livello. Si presenta nel momento in cui cerchiamo di trascrivere con precisione le nostre immagini mentali piú semplici.

Un'immagine vale piú di mille parole e, purtroppo, questo è vero anche per le immagini che esistono solo nella nostra testa.

Per capire questo concetto, ecco un primo esercizio che utilizza uno dei nostri esempi preferiti. Quanto tempo impiegate a visualizzare ciò che state facendo mentre vi allacciate le scarpe? Due secondi? Tre secondi? Ora prendete carta e penna e cercate di descrivere esattamente il movimento, in modo tale che un principiante possa seguire le vostre istruzioni e ottenere lo stesso risultato. La versione piú difficile dell'esercizio consiste nell'utilizzare solo parole. Ma anche la versione facile, che utilizza i disegni, è comunque molto difficile.

Cogliere la portata di questa difficoltà significa comprendere qualcosa di fondamentale e profondamente incoraggiante: un testo matematico può sembrare terribilmente complicato eppure esprimere idee molto semplici.

In sostanza, non c'è alcun motivo di avere paura dei testi matematici. La lettura *tra le righe* di cui parla Thurston non solo è possibile, ma è sicuramente molto piú semplice del testo stesso. Tuttavia, prima di arrivare a questa semplice conoscenza, e fino a quando non avrete le giuste immagini mentali, dovrete procedere a tentoni.

L'arte di avere le idee chiare

Se non siete riusciti a trovare le parole per spiegare come vi allacciate le scarpe, se non avete avuto voglia di provarci o se vi siete arresi a metà strada, non c'è da sorprendersi.

L'arte di scrivere la matematica, cioè l'arte di trascrivere le proprie immagini mentali in modo chiaro e preciso perché altri possano coglierle e riprodurle, è un'arte molto raffinata.

Ciò che rende difficile la faccenda è che le vostre immagini mentali sono molto meno chiare di quanto pensiate. Cos'è che impedisce al nodo dei lacci delle scarpe di sciogliersi per proprio conto quando è fatto correttamente? Se non lo sapete, allora non sapete davvero come è fatto il nodo.

Come spiega Grothendieck, il lavoro di scrittura matematica è in realtà un doppio compito: chiarire le idee e perfezionare il linguaggio. Si tratta di un delicato esercizio di coordinazione psicomotoria che richiede anni di pratica per essere padroneggiato. La buona notizia è che chiunque può farlo e, se si dota dei mezzi necessari, può continuare a progredire per tutta la vita.

Imparare a scrivere di matematica significa imparare a pensare con chiarezza. Sarebbe un peccato privarsi di questa possibilità.

Quando si scrive matematica in prima persona, si capisce anche perché si usa un formalismo cosí bizzarro, un linguaggio fatto per i robot: in realtà, non c'è altra scelta.

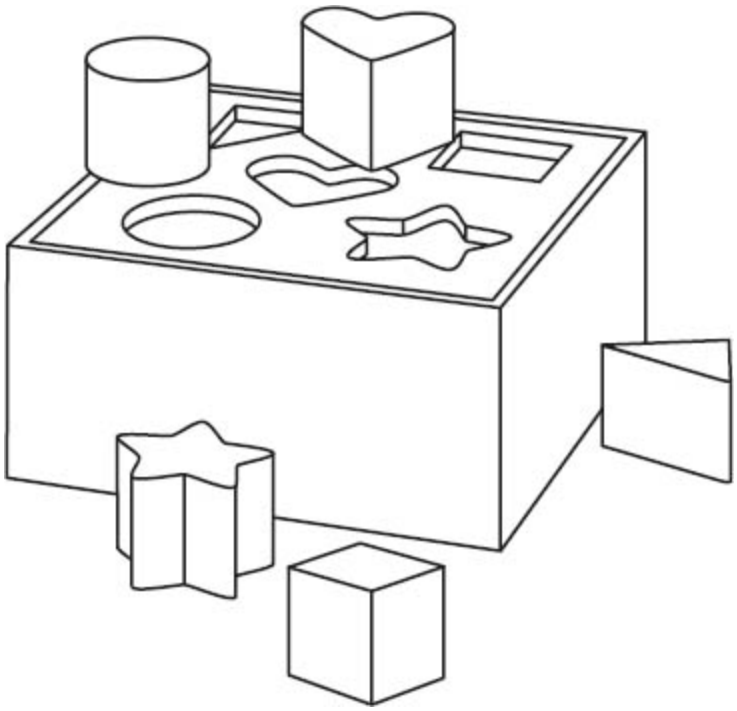
Per capire questa scelta, torniamo a un altro dei nostri esempi preferiti: la nozione di forma, cosí come l'avete scoperta nella prima infanzia. Immaginiamo un mondo parallelo in cui, per davvero, siete stati i primi a

scoprire il concetto di forma. Come spieghereste a parole il vostro metodo per distinguere le stelle dai quadrati e per mettere i pezzi giusti nei fori giusti?

Il gioco della pazienza

In questo mondo immaginario, la cultura visiva è cosí scarsa che il *gioco delle forme* diventa il *gioco della pazienza*, perché l'unico metodo conosciuto per risolverlo è quello di fare tentativi a caso per ore.

Non esiste alcun linguaggio geometrico. Le parole «rotondo», «quadrato» e «triangolo» non esistono ancora. La parola «cuore» esiste solo per descrivere ciò che batte nel nostro petto. Se la usate per riferirvi a uno dei pezzi del gioco della pazienza, nessuno vi capirà. Lo stesso vale per la parola «stella». Le stelle brillano in cielo, ma nessuno vede il collegamento con il gioco della pazienza. Non si tratta nemmeno di stabilire se le stelle abbiano cinque, sei, sette o otto punte, siamo ancora molto lontani da questo. E poi, da dove viene l'idea che le stelle abbiano delle *punte*? Cosa può voler dire?



Nel vostro modo di vedere il mondo, nel vostro linguaggio interiore, accettate l'idea che le stelle abbiano delle punte e riconoscete una stella a cinque punte in uno dei pezzi del gioco della pazienza. Facile, no? Soltanto che questa idea esiste solo nella vostra testa per il momento.

Gli altri non sono ciechi. Sono biologicamente in grado di vedere le stesse forme che vedete voi, ma non hanno ancora imparato a farlo. I loro cervelli ricevono le stesse informazioni visive grezze, ma non le strutturano allo stesso modo.

«Guarda, questo pezzo è a forma di stella. Anche lí c'è un foro a forma di stella. Se prendi questo pezzo e lo inserisci in questo foro, nel modo giusto, si incastrerà da solo, al primo colpo».

Questo tipo di spiegazione non funzionerà. Le persone non vedono la stella davanti ai loro occhi. Possono vivere nel vostro mondo, ma la loro esperienza è diversa. Rideranno come matte se riuscirete a risolvere il gioco senza procedere a tentoni. Per loro sarete un mago.

La teoria del tatto

In mancanza di geometria, gli abitanti di questo mondo parallelo hanno compensato sviluppando il senso del tatto. A tutti gli scolari si insegna la *teoria del tatto*. Imparano a esaminare le superfici con le dita e a riconoscere le consistenze. Sanno cos'è duro, morbido, liscio, ispido, scanalato, fibroso, ruvido, friabile, poroso.

Poiché ne comprendono la sensazione fisica, le persone sanno cos'è un *vuoto* e cos'è una *punta*. Non è molto, ma è un buon punto di partenza e per noi è sufficiente.

La forza del rapporto matematico con il mondo è che ci permette di estendere il linguaggio con nuove parole a cui diamo un significato preciso. Basandosi su cose che le persone già vedono, si costruiscono nuove cose che non si vedono ancora ma che si possono manipolare attraverso le loro definizioni.

A forza di manipolare queste nuove parole, la speranza è che si finisca per capirle davvero.

Per poter parlare di triangoli, stelle e quadrati senza contare sulla vista, è sufficiente ricostruire questi concetti utilizzando il vocabolario del tatto. Non basta puntare semplicemente il dito e dire «guarda, quella è una

stella». Questa incapacità di appoggiarsi a un'esperienza comune provocherà seri problemi nella scrittura e si tradurrà in un testo indigesto e complicato. Ma, comunque, ne usciremo.

Ecco come potrebbe apparire il risultato. Fate attenzione: le tre pagine seguenti sono scritte in uno stile molto simile a quello della matematica ufficiale. Di conseguenza, sono davvero pesanti da leggere.

Teoria tattile del gioco della pazienza, per principianti

Quando si passa il dito lungo il bordo di un pezzo (o di un foro), si noterà una successione di punte e di vuoti[1]. Diamo un nome a questa successione di cuspidi e cavità: chiamiamola la *firma* del pezzo (o del foro). Ad esempio, esiste un pezzo (quello che si vuole chiamare *triangolo*, ma questa parola non esiste ancora) la cui firma è:

punta, *punta*, *punta*;

e c'è un foro (quello in cui può entrare questo pezzo) la cui firma è:

vuoto, *vuoto*, *vuoto*.

Come sempre accade con le definizioni matematiche, la scelta del termine «firma» è arbitraria. Avrei potuto scegliere un'altra parola e non avrebbe fatto alcuna differenza, poiché il significato che le attribuisco si riduce alla sua definizione, senza alcun legame diretto con il suo uso nel linguaggio quotidiano. Ma visto che posso scegliere, tanto vale che scelga una parola che renda piú facile la lettura, cioè una parola il cui significato corrente può aiutarci a capire il significato matematico. «Firma» mi sembra la parola giusta perché evoca l'idea che la firma permetterà di identificare ogni pezzo e ogni foro. Se questa parola non vi dice nulla, siete liberi di sostituirla con un'altra.

Tuttavia, la definizione che ho dato pone un piccolo problema tecnico: lo stesso oggetto può avere piú firme, a seconda del punto di partenza del dito. Per essere rigorosi, dovremmo quindi parlare «di una» firma, non «della» firma. Ad esempio, esiste un pezzo (quello che si vuole chiamare *stella*) la cui firma è:

punta, *vuoto*, *punta*, *vuoto*, *punta*, *vuoto*, *punta*,
vuoto, *punta*, *vuoto*.

Ma se iniziamo a far scorrere il dito a partire da un'altra parte, come firma potremmo anche trovare:

vuoto, punta, vuoto, punta, vuoto, punta, vuoto,
punta, vuoto, punta.

Ciò che conta non è la firma, ma la firma a *rotazione di prossimità*. Con l'espressione «a rotazione di prossimità» intendiamo quanto segue: definiamo *rotazione elementare* di una firma l'operazione che consiste nel prendere la prima parola e metterla alla fine. Ad esempio, una rotazione elementare a partire da

vuoto, punta, punta, punta

risulta in

punta, punta, punta, vuoto.

Diciamo che due firme sono *equivalenti a rotazione di prossimità* se possiamo passare dall'una all'altra con una sequenza di rotazioni elementari. Ad esempio, le seguenti quattro firme sono equivalenti dal punto di vista della rotazione di prossimità:

vuoto, punta, punta, punta
punta, punta, punta, vuoto
punta, punta, vuoto, punta
punta, vuoto, punta, punta.

Infatti, si deducono l'una dall'altra applicando rotazioni elementari. Se applichiamo una rotazione elementare all'ultima di queste quattro firme, torniamo alla prima.

Definizione. Una forma è una classe di equivalenza di firme a rotazione di prossimità.

Per comprendere questa definizione, è necessario conoscere la nozione di *classe di equivalenza*. Si tratta di una nozione matematica classica e ne troverete la definizione in qualsiasi libro di teoria degli insiemi. In pratica, la definizione equivale a dire che qualsiasi firma definisce una forma e che due firme definiscono la stessa forma se e solo se sono equivalenti a rotazione di prossimità. Le quattro firme di cui sopra sono un esempio di classe di equivalenza di firme rispetto alla rotazione di prossimità.

Se mi diverte, posso continuare a inventare parole. Sono in grado di definire triangoli, cerchi e quadrati in base alle loro firme. Ad esempio, un *triangolo* può essere definito come la forma la cui firma è:

punta, punta, punta.

Allo stesso modo, posso scegliere di chiamare *stella a n punte* la forma la cui firma è ottenuta ripetendo *n* volte lo schema *punta*, *vuoto*. Un caso particolare è la stella a cinque punte, la cui firma è:

punta, vuoto, punta, vuoto, punta, vuoto, punta,
vuoto, punta, vuoto.

Un *cuore*, per definizione, è una stella a una punta.

Con il linguaggio delle firme e delle forme, possiamo descrivere un metodo per risolvere il gioco della pazienza senza dover procedere a tentoni per ore.

Definizione. Lo specchio di una firma è la sequenza di parole ottenuta dalla firma sostituendo sistematicamente la parola «vuoto» con la parola «punta» e la parola «punta» con la parola «vuoto».

Quindi lo specchio di *punta, punta, punta* è *vuoto, vuoto, vuoto*, e viceversa. Se due firme sono equivalenti a rotazione di prossimità, lo sono anche i loro specchi, e quindi la nozione di specularità si estende alle forme. Il risultato principale della teoria dei giochi di pazienza è il seguente:

Teorema. Per ogni pezzo B, esiste un unico foro T tale che la forma di T è speculare alla forma di B, e T è l'unico foro in cui B può entrare.

In altre parole, per scoprire in quale foro può entrare un pezzo, ecco un metodo:

1. Far scorrere il dito sul pezzo per ricavarne la forma.
2. Far scorrere il dito su ogni foro fino a trovare quello speculare alla forma del pezzo.
3. Una volta trovato, si saprà con certezza di aver trovato il foro giusto: il pezzo potrà entrarvi.

La vera matematica

Come tutte le definizioni matematiche, la nostra definizione di forme dà l'impressione di essere arbitraria e immateriale.

Non tralasciamone però il lato positivo: abbiamo appena portato a termine l'impresa di parlare di forme con il vocabolario dell'esperienza tattile, senza alcun riferimento all'esperienza visiva. In altre parole, abbiamo trovato un modo per esprimere ciò che significa «essere a forma di stella» in un linguaggio comprensibile a un cieco.

L'aspetto negativo è che la nostra definizione è infelice. Non riesce a trasmettere la bellezza e la ricchezza dell'esperienza visiva. Rispetto al significato che le forme hanno per noi, alla loro profondità, alla loro universalità, a tutto ciò che ce le fa amare e vivere come certezze, la nostra definizione è di una povertà desolante.

Sarebbe sciocco pensare che la faccenda finisca qui; al contrario, abbiamo appena iniziato. Per sciogliere il garbuglio di cosa sia davvero una forma, la nostra definizione è solo un piccolo punto di partenza tra innumerevoli altri possibili punti di partenza. Nulla ci impedisce di proseguire in questo sforzo. Nulla ci vieta di inventare un linguaggio sempre piú sottile per cogliere con sempre maggiore finezza cosa significa esattamente che una stella è piú o meno appuntita, piú o meno allungata, piú o meno storta ecc.

Ma allargare il vocabolario, aggiungere precisione e dettagli, non risolverà il nostro problema.

Il nostro problema è molto piú serio. Vedere non è una questione di parole. Vedere è un'esperienza sensoriale e istintiva, che viviamo senza dover pensare.

Dire che una forma è *una classe di equivalenza di firme a rotazione di prossimità*, dire che una stella è *una forma la cui firma si ottiene ripetendo lo schema «punta, vuoto» n volte*, può essere ingegnoso, ma non ci soddisferà mai completamente. Non siamo robot. Non vogliamo assolutamente conoscere il mondo attraverso un linguaggio che assomiglia a quello dei moduli amministrativi. Vogliamo «vedere» senza dover pensare.

Quando comprendete il senso di un testo scritto nel linguaggio ufficiale della matematica, vi trovate nella situazione di un cieco che comprende la vostra definizione formale delle stelle senza essere in grado di vederle. Si tratta per forza di cose di un linguaggio confuso, almeno all'inizio, finché non si riesce a dare un senso intuitivo alle definizioni, finché non si riesce a capire cosa «significhino».

La sfida della comprensione matematica è proprio questa: trovare un modo per creare nuove immagini mentali all'interno di noi stessi sulla base di definizioni formali, per rendere queste definizioni intuitive, per «sentire» di cosa stanno parlando.

Comprendere un testo matematico che definisce *una stella* come *una forma la cui firma si ottiene ripetendo lo schema «punta, vuoto» n volte*, significa riuscire a dimenticare questa complessa definizione e sentire direttamente cos'è una stella, all'istante, alla semplice menzione della parola «stella».

Il vero piacere della matematica è quello che provate nel momento in cui, tutt'a un tratto, vi rendete conto che riuscite a vedere le stelle mentalmente quando non le avete mai viste prima.

Le tecniche segrete dei matematici puntano a facilitare e accelerare questa comprensione intuitiva. Sono tecniche che utilizzano il linguaggio per *imparare a vedere*. Nel resto del libro ne forniremo alcuni esempi.

So che sembra troppo bello per essere vero. Vi risulta difficile pensarvi capaci di un simile exploit. Ma potete farlo. Avete la capacità di partire da una definizione astratta e di percepire intuitivamente il suo significato. Siete già riusciti a farlo.

Il numero che potete evocare mentalmente prendendo un miliardo e togliendo un'unità, nessuno è mai stato in grado di descriverlo come qualcosa di diverso da un complesso assemblaggio di nozioni matematiche astratte.

La sua forma decimale 999 999 999, quella che vi dà l'impressione che il numero sia fisicamente presente sulla pagina, proprio lí sotto il vostro naso, non è altro che il riassunto di una lunga definizione formale. Caratterizza il numero come il risultato di una sequenza di addizioni e moltiplicazioni le quali, se provate a immaginarle, vi faranno venire il mal di testa:

Nove piú nove volte dieci piú nove volte dieci volte dieci piú nove volte dieci volte dieci volte dieci piú nove volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci piú nove volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci piú nove volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci piú nove volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci piú nove volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci volte dieci.

Sulla carta, questo numero è una combinazione astratta, logica e fredda. Nella vostra testa, si tratta di un oggetto semplice, concreto ed evidente.

9. *Qualcosa che non va*

A scuola, mi dicevano spesso che non tenevo in mano la penna nel modo giusto e che per questo scrivevo come una gallina.

Ho scelto di studiare matematica perché credevo che mi avrebbero insegnato a «tenere» la matematica in un modo appropriato nella mia testa. La gestivo a modo mio ed ero piuttosto bravo, ma non ero affatto sicuro che fosse il modo giusto.

La piú grande sorpresa durante gli studi e la carriera scientifica è stata non ricevere alcun insegnamento formale al riguardo, come se l'argomento non fosse una cosa seria o degna di essere affrontata.

Molto probabilmente ero un ingenuo, ma mi sembrava che il grande problema della matematica non fosse la veridicità di questo o quel teorema, ma cosa lo rendesse cosí facile per alcuni e cosí difficile per tutti gli altri. Cosí, dopo il diploma, all'inizio del mio primo anno di studi, mi aspettavo che il modo giusto di trattare mentalmente i concetti matematici sarebbe stato il tema della prima lezione. Era cosí scontato: finalmente avrebbero iniziato a spiegarmi come fare!

Ma la prima lezione riguardava qualcosa di completamente diverso. Ciò che la matematica ufficiale considera come punto di partenza non sono i gesti invisibili che si fanno con la mente, ma la logica formale e la teoria degli insiemi. La spiegazione attesa non è mai arrivata né alla lezione successiva, né a quella dopo. Alla fine, ho smesso di aspettarla.

Tuttavia, la questione è tornata a galla qualche settimana dopo, quando abbiamo avuto a che fare con spazi vettoriali di qualsiasi dimensione. È stato allora che ha iniziato a preoccuparmi seriamente.

Uno spazio vettoriale di dimensione 1 è una linea. Uno spazio vettoriale di dimensione 2 è un piano. Uno spazio vettoriale di dimensione 3 è lo spazio «a tre dimensioni» in cui viviamo. O meglio, è lo spazio in cui

tendiamo a credere di vivere, anche se Einstein ci ha spiegato in cosa ciò non sia vero.

Non c'è motivo di fermarsi a 3. Usando il formalismo logico, possiamo continuare. Possiamo definire cosa sia uno spazio di dimensione 4, 5, 6 e cosí via. Se si vuole, si può fare geometria nella dimensione 24, nella dimensione 196 883 o nella dimensione *n*, dove *n* è un numero intero qualsiasi.

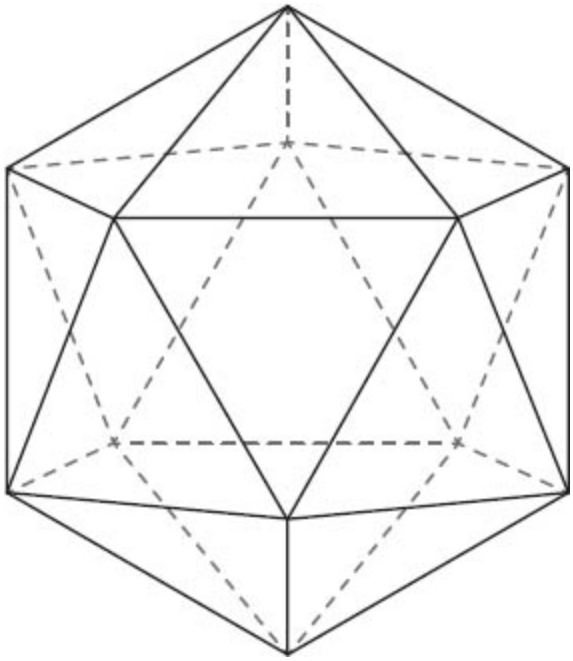
Questi spazi non sono curiosità da laboratorio. Sono nozioni fondamentali, indispensabili per comprendere il mondo che ci circonda e cosí centrali per la scienza e la tecnologia degli ultimi cento anni che spesso fanno parte del vocabolario di base, proprio come i numeri interi.

Se non avete mai imparato a pensare in qualsiasi dimensione, vi siete persi una delle grandi gioie della vita. È come se non aveste mai visto il mare o mangiato la cioccolata.

Vedere nello spazio

Quando si fa geometria in dimensione 2 o 3, c'è un modo molto semplice per mostrare ciò di cui si sta parlando: fare un disegno.

Ad esempio, in uno spazio di dimensione 3, potete mettere insieme 20 triangoli equilateri per ottenere un dado a 20 facce che ha questo aspetto:



Questo oggetto straordinario, conosciuto fin dall'antichità, è chiamato *icosaedro regolare*. Guardando il disegno, si ha l'impressione di osservare un icosaedro che fluttua nello spazio. Ma non è ciò che avete realmente davanti agli occhi. Quello che state guardando è una pagina di dimensione 2 su cui si trova *l'immagine* di un icosaedro. Piú precisamente, questa immagine è ciò che chiamiamo *proiezione*: è l'ombra (nella dimensione 2) di un icosaedro immaginario (nella dimensione 3)[1].

Il vostro cervello è in grado di ricostruire molto facilmente le cose nella dimensione 3 a partire dalle loro proiezioni nella dimensione 2.

Quando guardate le foto delle vacanze, vi sembrerà di vedere scene che si svolgono nella dimensione 3. Non è necessario alcuno sforzo particolare. Non è faticoso e non pone alcun problema metafisico. Non direste mai che queste scene si svolgono nella dimensione 2. Non direste nemmeno che quello che pensate di vedere nella dimensione 3 è un'astrazione, una ricostruzione mentale, frutto della vostra immaginazione. Non avrete mai la sensazione che quello che pensate di vedere nelle fotografie sia un'allucinazione.

Il vostro cervello può anche vedere cose che l'immagine non vi mostra. Guardando la proiezione dell'icosaedro, non solo potete vederlo, ma potete anche farlo girare nella vostra testa, anche se ci vuole un po' di concentrazione. Il disegno rimane perfettamente immobile. Questo non vi impedisce di capire bene cosa intendo con «far girare l'icosaedro».

Ad esempio, se ruotate l'icosaedro di un quinto di giro intorno al suo asse verticale, troverete sempre l'icosaedro da cui siamo partiti. Questa invarianza alla rotazione è una proprietà ben nota dell'icosaedro.

Se avessi semplicemente definito l'icosaedro regolare come una costruzione astratta di 20 triangoli equilateri, senza darvi un modo per immaginarlo visivamente, vi sarebbe stato molto piú difficile capire questa invarianza per rotazione. Con il disegno è molto piú facile.

Trasformare le definizioni matematiche in immagini mentali aiuta a comprenderle. L'intuizione visiva rende evidenti proprietà matematiche che, senza un'immagine mentale, non lo sarebbero affatto. Quando non riuscite a immaginare gli oggetti matematici, sentite di non averli realmente compresi. Questa impressione è del tutto giustificata.

Geometria per non vedenti

Quando si sente parlare per la prima volta di geometria in dimensione 4, ci si chiede cosa sia questa *quarta* dimensione. Si tratta del tempo? O di qualcos'altro?

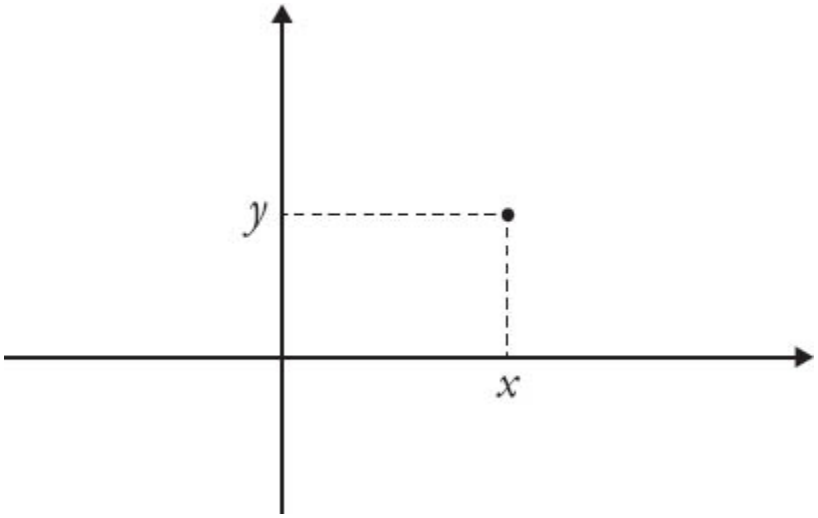
La risposta giusta è che la quarta dimensione è esattamente ciò che vogliamo che sia.

Quando facciamo geometria nella dimensione 2, cioè su un piano, un punto è determinato da due coordinate che generalmente vengono chiamate *ascissa* e *ordinata*, o x e y, e che rappresentano esattamente ciò che vogliamo che rappresentino:

– Quando si guarda una carta geografica, di solito x è la longitudine e y la latitudine.

– Quando si disegna la facciata di un edificio, di solito x è la larghezza e y l'altezza.

– Quando si rappresenta l'evoluzione di una popolazione di conigli, di solito x è il tempo e y il numero di conigli.



Allo stesso modo, in uno spazio di dimensione 10, un punto è determinato da 10 coordinate, solitamente chiamate x_1, …, x_{10}. Se si desidera che queste coordinate rappresentino qualcosa, possono rappresentare esattamente ciò che vogliamo.

Se volete descrivere la progressione geografica di un'invasione di conigli, dovete pensare in dimensione 4, perché avete bisogno di 4 coordinate: *longitudine*, *latitudine*, *tempo* e *densità dei conigli*.

È giusto dire che la geometria in dimensione 4 è un'astrazione. Ma è un'astrazione semplice e naturale. Il cervello può accettare l'idea della

dimensione 4 e trovarla addirittura reale, cosí come accetta e trova reali tutte quelle cose che in realtà non lo sono affatto. *La progressione geografica di un'invasione di conigli* è un concetto astratto. Se lo trovate reale, è perché in fondo il vostro cervello è già pronto ad accettare l'idea che la dimensione 4 esista davvero e sia reale.

Contrariamente alla credenza piú diffusa, non è mai l'astrazione a rendere la matematica difficile da capire. L'astrazione è il nostro modo universale di pensare. Le parole che usiamo sono tutte astrazioni. Parlare, formulare frasi, significa plasmare e assemblare astrazioni. La geometria in dimensione 4 non è piú astratta della geometria in dimensione 2. Il problema della geometria in dimensione 4 non ha nulla a che fare con l'astrazione. Il problema è che è difficile sia da visualizzare sia da disegnare.

I corsi di geometria con un numero elevato di dimensioni sono corsi di geometria per non vedenti.

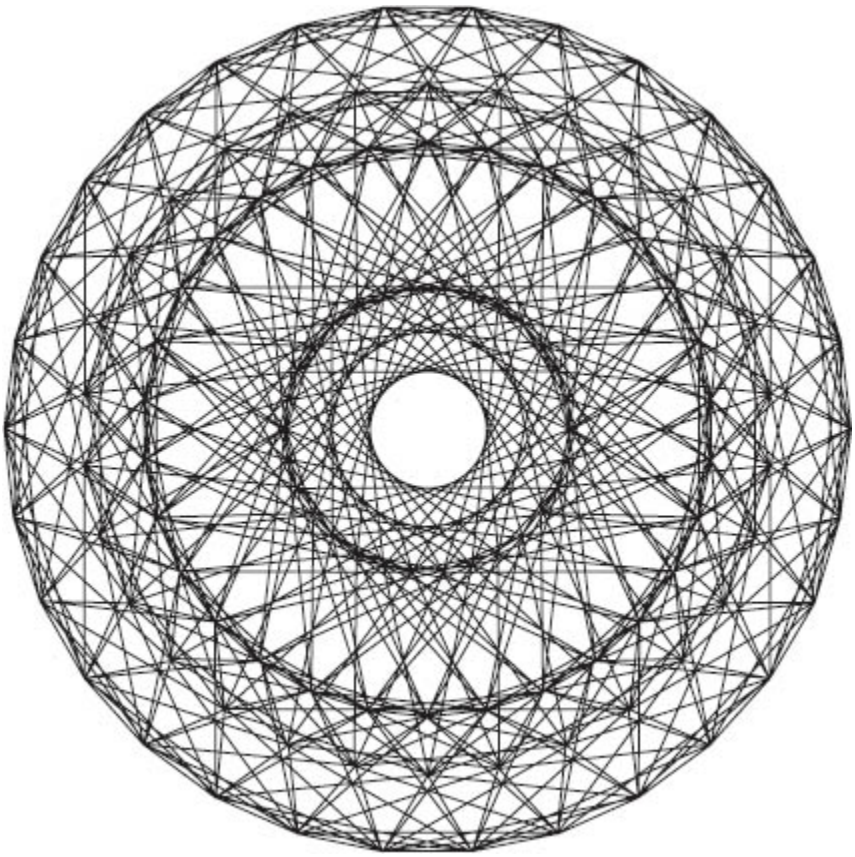
Assomigliano alla teoria del tatto del capitolo precedente: invece di affidarsi all'intuizione visiva, utilizzano il linguaggio e il formalismo matematico per definire un vocabolario geometrico il cui significato è sempre molto preciso ma la cui interpretazione visiva non è evidente. Tutto può essere descritto con formule riferite a delle coordinate. Ad esempio, esiste una formula che definisce la distanza tra due punti, in base alle loro coordinate.

All'inizio, il nostro cervello non è abituato a questo nuovo vocabolario. Non sa come attribuirgli un significato visivo-intuitivo. La geometria in dimensione 4 non può quindi essere insegnata come la geometria in dimensione 2, dove le figure e l'intuizione visiva diretta giocano un ruolo centrale.

Per esempio, esiste un analogo dell'icosaedro in dimensione 4. Si tratta di un dado a 600 lati, molto regolare e ancora piú bello dell'icosaedro. O meglio, dovremmo dire che questo oggetto è un «iper-dado» con 600 «iper-facce». Queste iper-facce sono oggetti in dimensione 3 che sono parte di tetraedri regolari, cioè piramidi regolari con base triangolare. Ogni iper-faccia ha 4 facce che sono triangoli equilateri e lungo ognuna di queste facce viene incollata un'altra iper-faccia. In totale, ci sono 600 iper-facce, 1 200 facce, 720 spigoli (i lati dei triangoli) e 120 vertici.

Fate fatica a vederlo?

Se può esservi d'aiuto, ecco un disegno:



Quel che vedete è l’ombra, in dimensione 2, dell’oggetto nella dimensione 4 (o meglio, è *una delle sue ombre*, perché l’ombra di un oggetto dipende da come è orientato e dalla direzione della luce).

Vi piacerebbe guardare l’immagine e, senza alcuno sforzo, vedere un «iper icosaedro» che fluttua davanti a voi, sospeso in uno spazio a 4 dimensioni.

Anch’io vorrei vederlo fluttuare davanti a me. Vorrei percepire il suo spessore multidimensionale, afferrarlo a colpo d’occhio e comprenderne la forma nella sua globalità. Ahimè, questo non è ciò che succede.

Il mio cervello non è in grado, istantaneamente e senza sforzo, di costruire l’immagine mentale di un oggetto nella dimensione 4 a partire dalla sua ombra nella dimensione 2. Ho imparato a percepire la presenza fisica dell’ipericosaedro, ma in modo diverso, senza usare il disegno.

Immagini assolutamente sbagliate

Studiando matematica, mi sono presto reso conto di essere come tutti gli altri. Non sapevo come vedere gli oggetti geometrici in dimensione elevata nello stesso modo in cui li vedevo nelle dimensioni 2 o 3.

Ma mi sono reso conto anche di un altro fenomeno, piú nascosto e inaspettato.

Non c'era nulla di glorioso in questo fenomeno. Si svolgeva sullo sfondo e come un rumore di fondo, tanto da passare facilmente inosservato. Forse era un fenomeno che si era sempre manifestato senza che ci avessi mai prestato attenzione.

In ogni caso, è stato solo in quel preciso momento della mia vita, nell'anno in cui ho compiuto diciotto anni, nei primi mesi di studio della matematica, quando abbiamo iniziato la geometria in dimensione elevata, che ne ho preso piena coscienza: alcune delle nozioni astratte che mi venivano insegnate mi evocavano impressioni molto vaghe di natura piú o meno visiva.

Queste impressioni non erano molto forti e il loro significato non era molto chiaro. Erano immagini mentali confuse e fugaci. A volte c'erano, a volte no. Non sapevo come considerarle. Erano immagini instabili, sfocate ed evanescenti. Erano ingenue. E, peggio ancora, erano false.

Era come se il mio cervello cercasse di vedere la geometria in dimensione elevata mettendo insieme le immagini mentali di dimensione 2 e 3. Ma ero completamente fuori strada. Le immagini non erano solo un po' sbagliate, come un cerchio disegnato è un po' sbagliato perché non è perfettamente rotondo. Le mie immagini mentali erano sbagliate *in modo ridicolo*.

Ero in una classe preparatoria al Louis-le-Grand[2]. Mi insegnavano la matematica seria, la matematica ufficiale con tutto il suo armamentario di assiomi, definizioni, proposizioni, teoremi, dimostrazioni, simboli e formule. Mi insegnavano tutto questo in modo logico e strutturato. Mi insegnavano a scrivere la matematica in modo rigoroso e preciso.

E per tutto il tempo, senza osare dirlo a nessuno, ho continuato ad aggrapparmi alla mia ingenua intuizione. Non ha funzionato per niente e il risultato è stato decisamente strano.

I disegni che facevo mentalmente assomigliavano agli scarabocchi dell'asilo, quando disegnavo persone con braccia e gambe direttamente attaccate alla testa, senza rendermi conto che stavo tralasciando una parte del corpo. O meglio, mi rendevo conto che stavo dimenticando una parte

del corpo che aveva una certa importanza, ma in modo confuso e farraginoso, senza riuscire a dare un nome a ciò che mancava. Sapevo che c'era qualcosa che non andava, ma non sapevo dire cosa.

Un giorno, ricordo, ho chiamato l'insegnante per dirle che mancava qualcosa nel mio disegno. Mi ha risposto che no, che il mio disegno era molto bello. Ho avuto la netta impressione che mi stesse prendendo in giro.

Non avevo alcuna intenzione di rifare l'esperienza e di alzare la mano per dire che avevo un problema perché le mie immagini mentali erano sbagliate. Non avevo voglia di rendermi ridicolo davanti a tutti. La mia reazione è stata considerare queste false immagini mentali come pensieri parassiti di cui liberarsi.

Se il segreto per superare con successo la classe preparatoria del Louis-le-Grand fosse pensare come un bambino di quattro anni e scarabocchiare mentalmente, lo si saprebbe.

Era tempo di diventare grandi. Dovevo imparare a pensare in modo logico e strutturato, con parole serie e complicate, invece di continuare a rappresentarmi le cose in modo semplicistico e figurato. Dovevo diventare adulto.

Tubi piú o meno grandi

In quel periodo credevo ancora che la logica servisse a pensare. Non riuscivo a pensare in modo logico, ma pensavo di essere io il problema. Credevo che lo avrei risolto studiando la matematica e che il primo passo fosse quello di liberarmi dalle mie ingenue e false immagini mentali.

Ma in mezzo a tutte quelle immagini false, in mezzo a quei pensieri parassitari dai quali cercavo di liberarmi, mi ha sorpreso scoprirne uno un po' meno falso degli altri.

Quando si studiano gli spazi vettoriali, si studiano anche le nozioni di *dimensione*, *applicazione lineare*, *rango*, *nucleo*… In generale, rappresentiamo gli spazi vettoriali con lettere, e le applicazioni lineari con frecce che collegano queste lettere. Ma quando ho scelto di vedere gli spazi vettoriali come contenitori piú o meno grandi (a seconda della loro dimensione) e le applicazioni lineari come tubi piú o meno grandi (a seconda del loro rango), tutti gli esercizi che trattavano queste nozioni sono diventati palpabili.

Non era granché. C’erano molti altri argomenti e molti esercizi che non riuscivo a risolvere. Ma su questo argomento, non solo potevo risolvere gli esercizi, ma erano diventati palesi come 1 000 000 000 – 1 = 999 999 999. Erano cosí evidenti che sembrava assurdo che li si potesse proporre e ancora piú assurdo che ci fossero persone che non riuscivano a risolverli.

Questa immagine dei tubi mi ha semplificato la vita, ma da dove viene? Era cosí che si doveva fare? Cosa succedeva nella mente degli altri? Come immaginavano i concetti matematici?

Ricordo di aver guardato, perplesso, i miei compagni di classe, mentre scrutavo le loro facce alla ricerca di segni di ciò che gli era passato per la testa.

Di colpo, mi sono reso conto che non ne avevo la minima idea.

Un problema enorme

Nessuno ci aveva spiegato cosa avremmo dovuto fare con la mente e questo è diventato un problema enorme.

Ho capito che c’erano due modi radicalmente diversi di esaminare l’insegnamento che stavamo ricevendo e che questi due approcci erano fra loro incompatibili.

Il primo approccio consiste nel trattare la matematica come conoscenza. Gli enunciati matematici sono informazioni che bisogna conoscere e saper ricostruire. Bisogna imparare le definizioni, i teoremi e le dimostrazioni.

Il secondo approccio consiste nel rifiutare di imparare. Di avvicinarsi alla matematica come a un’esperienza sensoriale. L’unica funzione degli enunciati matematici è quella di evocare immagini mentali, e solo queste immagini mentali ci permettono di capire. Una volta ottenute le giuste immagini mentali, tutto il resto diventa chiaro.

I due approcci sono incompatibili perché non comportano affatto gli stessi gesti mentali. Imparare a memoria, accettare di credere a ciò che non si capisce, esiste solo nel primo approccio. Nel secondo approccio, guardiamo a ciò che non capiamo con sospetto e incredulità: «Ah sí? Questa cosa dovrebbe essere vera? Incredibile! Ma come è possibile? Come posso fare per vederla?»

Fino a quel momento avevo seguito istintivamente il secondo approccio. Per me aveva funzionato abbastanza bene. Alla scuola primaria, quando mi

avevano spiegato che cos'è un cerchio, avevo visto subito i cerchi nella mia testa. Cosí ero diventato bravo in matematica. Fondamentalmente, la scuola era servita solo a dare nomi a cose che erano già facili da vedere piú o meno chiaramente.

Ma ero arrivato alla fine della strada. La scuola ora mi parlava di cose serie e profonde che non capivo e che la mia intuizione non riusciva a immaginare. Avevo raggiunto i limiti delle mie capacità mentali. Questa immagine di tubi di varie dimensioni è stata forse la mia ultima intuizione efficace. E anche in quel caso, dev'essere stata solo fortuna. Con immagini cosí ingenue, francamente, in cosa potevo sperare?

Senza poter contare sulla mia intuizione, ero bloccato. Non avevo scelta. Era ora di iniziare a imparare.

Ma ero consapevole delle implicazioni. Trattare la matematica come conoscenza significava rinunciare a sentirla vivere in me. Rinunciare ad amarla. Rinunciare al piacere di capirla.

In ascolto della dissonanza

A dire il vero, non era la prima volta che avevo seri problemi con la matematica.

Mi era già successo all'inizio della scuola secondaria, quando era stato necessario usare le lettere per definire i numeri. «Sia *n* un numero intero». Ma se *n* è un numero intero, perché non dire qual è? Perché questa segretezza? Avevo avuto la sensazione di non centrare la questione, di non capire nulla, di non essere abbastanza intelligente.

Fortunatamente, è durato poco. Senza alcuno sforzo particolare, per il semplice effetto del tempo, ero arrivato ad accettare l'idea che si può ragionare con delle lettere, ovvero ragionare con i numeri senza sapere che numeri siano. Ed è proprio questo il punto. Ragionare con le lettere è un modo per ragionare con tutti i numeri contemporaneamente. Significa fare un numero infinito di ragionamenti con un numero finito di parole.

Solo che ora non avevo piú tempo. Ogni settimana c'erano dieci nuovi concetti da assimilare e non avevo idea di come organizzarli.

È stato proprio in tale contesto, poche settimane prima del mio diciottesimo compleanno, che ho preso la decisione piú importante della mia carriera scientifica e, senza dubbio, di tutta la vita: invece di inseguire

le mie stupide idee e i miei pensieri parassitari, ho scelto di accoglierli. Ho scelto di ascoltarli e di prenderli sul serio.

Naturalmente, non si trattava di credergli sulla parola. Sapevo che si sbagliavano. Era ovvio. Ma dato che era cosí scontato, ero in grado di dire esattamente in cosa si sbagliavano?

Oggi, quando cerco di descrivere questo metodo intellettuale, lo riassumo cosí: *mi sono messo in ascolto della dissonanza tra la mia intuizione e la logica*. Nel capitolo 11 vi spiegherò cosa significa in pratica, attraverso un esempio che dovrebbe parlarvi.

A ripensarci, sono ancora stupito di aver dovuto prendere questa decisione da solo, armeggiando nel mio cantuccio, senza che nessuno mi dicesse qual era il modo giusto per farlo.

Ricordo che ho cercato di parlarne con un amico, Xavier, con cui prendevo lezioni di matematica. Il problema era che i miei dubbi erano cosí lontani dalla matematica ufficiale e da quello che ci insegnavano che non riuscivo a esprimermi chiaramente. Non avevo le parole giuste per parlare di quei problemi. Mi ci sono voluti decenni per imparare a farlo.

Non avevo alcun motivo di credere che quel metodo avrebbe funzionato e, in effetti, non mi aspettavo che funzionasse veramente. Era un esperimento stupido che mi aspettavo di dover abbandonare molto presto. Lo stavo facendo per curiosità, solo per vedere, per scoprire a che punto si sarebbe fermato. Mi sembrava impensabile che quello fosse il modo giusto di farlo e che nessuno ce lo dicesse.

Però, ho capito subito che funzionava. Piú pensavo alle mie stupide idee, meno erano stupide. Piú mi concentravo sui miei pensieri parassitari, piú diventavano chiari. Piú ascoltavo la dissonanza tra la mia intuizione e la logica, piú riuscivo a tradurla in parole. La mia intuizione non è mai stata perfetta, ma progrediva continuamente, senza alcuno sforzo.

Nel giro di poche settimane, il mio modo di studiare è cambiato profondamente. Ho iniziato a usare il corso come strumento per mettere alla prova la mia intuizione. Cercavo di prevedere cosa avrebbe detto il professore. Il piú delle volte non ci riuscivo, ma mi permetteva di identificare i casi in cui la mia intuizione era già corretta. Le cose che ho capito, le ho capite cosí bene da potermene avvalere e concentrarmi sulle altre.

Ripassavo quello che non capivo finché non capivo perché non capivo. In fin dei conti, è questo che mi ha permesso di capire.

La nostra intuizione comune

Finché ci rifiuteremo di insegnare la dimensione umana della matematica, non ci saranno che autodidatti.

Non basta dire che la matematica è una questione di intuizione. È necessario anche spiegare che accedere a tale intuizione è possibile, e descrivere i metodi che ne consentono la maturazione. Non c'è niente che metta piú in soggezione del mito di un'intuizione matematica di natura speciale, di cui solo un'élite è dotata.

L'intuizione matematica è la stessa che usiamo ogni giorno, ma sviluppata e consolidata dal confronto con il linguaggio e la logica. Questo è ciò che diventa la nostra intuizione quando smettiamo di credere che sia un dono del cielo e ci diamo i mezzi per svilupparla sistematicamente. Spesso ho avuto l'impressione che il lavoro matematico fosse un'attività di giardinaggio.

Diserbare, piantare, potare, annaffiare. Si ha l'impressione che non cresca niente, ma alla fine constatiamo che qualcosa è cresciuto.

È difficile credere che si possa partire dalla nostra comune percezione dello spazio e farla crescere fino al punto in cui diventa istintivo pensare in qualsiasi dimensione. Eppure, è cosí.

Dietro le nostre false credenze sull'intelligenza matematica, e dietro le nostre superstizioni e inibizioni, si nasconde una profonda incomprensione del potere della nostra plasticità mentale e delle leggi che la governano. Questo sarà l'argomento del prossimo capitolo.

Il rifiuto da parte della didattica della matematica di affrontare il tema della crescita personale rimane per me un mistero. È come se gli insegnanti non si sentissero legittimati a parlarne. Poche persone osano descrivere la propria intuizione con parole semplici e ammettere la grande ingenuità delle loro immagini mentali.

Eppure, alcuni dei piú grandi matematici lo fanno con una serenità sconcertante. Un esempio lampante è Pierre Deligne[3].

Pierre Deligne è un matematico straordinario, il piú celebre degli allievi di Grothendieck, tanto che Grothendieck ha detto una volta di lui: «È piú bravo di me»[4]. Deligne ha ricevuto la medaglia Fields nel 1978 (per la risoluzione delle famose congetture di Weil) e il premio Abel nel 2013.

In un'intervista del 2013 in occasione del premio Abel, a Deligne è stato chiesto di parlare della sua straordinaria intuizione e della sua capacità di

sviluppare una profonda comprensione delle strutture astratte in dimensione elevata. Tra le altre cose, ha detto:

«È importante essere in grado di indovinare cosa è vero e cosa è falso».

«Non mi ricordo degli enunciati che sono stati dimostrati. Cerco piuttosto di avere una collezione di immagini nella mia mente. Diverse immagini. Sono tutte sbagliate, ma in modo diverso, e so in che modo sono sbagliate».

«Le immagini sono molto semplici. Posso facilmente disegnare nella mia testa qualcosa come un cerchio su un piano, e una linea retta che si muove e lo esplora».

«Sono sempre immagini molto semplici, ma combinate insieme».

L'intuizione matematica è cosí banale, semplice e sciocca che ci vuole una grande fiducia in sé stessi per non buttarla nel cestino. Quando non si è piú bambini, non abbiamo che un desiderio, quello di ridurre l'intuizione al silenzio. È quello che mi è quasi successo quando ho pensato di dovermi liberare delle mie stupide idee e dei miei pensieri parassitari.

La vocina timida che vi dice che non capite è il vostro intuito matematico. Non confondetela con la grossa voce rumorosa che vi dice che siete un disastro. La vocina sta cercando di guidarvi. È questa vocina che dovete ascoltare, con la massima attenzione. È di lei che dovete prendervi cura. È lei che dovete proteggere, per tutta la vita.

10. *Imparare a vedere*

Quando penso agli oggetti geometrici in dimensione elevata, ne ho una percezione visiva abbastanza chiara. Ma non li vedo nello stesso modo in cui vedo gli oggetti del mondo fisico. Riesco a vederne solo alcuni aspetti, alcuni pezzi, i dettagli che mi interessano. Il resto non riesco a vederlo. Ma ne sento la presenza in modo diffuso, con tutto il corpo.

Vedere nella dimensione 4 o 5 come vediamo nella dimensione 3 è considerato impossibile.

Ma Bill Thurston sapeva come farlo. Questa incredibile capacità è estremamente rara. Ha suscitato ammirazione anche all'interno della comunità matematica, dove ha contribuito a renderlo una figura leggendaria.

È naturale che ci metta in soggezione. Si è tentati di vederla come una prova che i grandi matematici sono diversi, con un cervello biologicamente superiore. Tuttavia, quando si conosce la storia personale di Thurston, ci si rende conto che l'ipotesi di un *dono straordinario* non regge. La sua storia non è quella di un alieno nato con la straordinaria capacità di vedere il mondo in cinque dimensioni.

Anzi, è esattamente il contrario. È la storia di un bambino nato con una disabilità che, nei primi anni di vita, gli ha impedito di vedere il mondo in tre dimensioni[1].

Thurston soffriva di un grave strabismo congenito. I campi visivi dei suoi occhi non si incontravano. Quando guardava un oggetto, poteva vederlo solo con un occhio alla volta. Le due immagini non potevano fondersi, il che lo privava di qualsiasi percezione diretta della profondità e del rilievo.

Ebbe la fortuna di avere una madre generosa e volitiva che, quando era bambino, dedicò molto amore ed energia per aiutarlo a superare la sua

disabilità. Quando il figlio aveva due anni, trascorreva ore con lui mostrandogli libri speciali pieni di colori e disegni, che erano la base per lunghi esercizi di riabilitazione.

Questo fu l'inizio della storia d'amore quasi carnale di Thurston con la geometria. L'amore per lo spazio, i materiali, le *textures* e le forme è alla base di tutto il suo lavoro e si riflette nei meravigliosi disegni che accompagnano i suoi scritti.

All'inizio della scuola primaria, Thurston decise di lavorare ogni giorno per migliorare le sue capacità di visualizzazione. Già in giovane età, senza saperlo, era un matematico straordinario.

Pensare che abbia trascorso piú tempo degli altri bambini a imparare a vedere sarebbe un grave errore. Ogni secondo in cui abbiamo gli occhi aperti, in cui ci muoviamo nel mondo osservandolo muoversi intorno a noi, facciamo progredire la nostra capacità visiva. Imparare a vedere è una delle attività principali dei primi anni di vita (e non solo di quelli). Ma per la stragrande maggioranza dei bambini si tratta di un'attività inconscia. Si fa di continuo, in sottofondo, senza alcuna particolare intenzione o sforzo di concentrazione.

Thurston non ha avuto questo lusso. Non poteva lasciare che la natura facesse il suo corso. Per lui, vedere bene il mondo non era istintivo.

Imparare a vedere è stato un progetto consapevole. Si potrebbe anche dire che si è trattato del progetto di tutta una vita.

Fosbury non poteva saltare come gli altri e ha dovuto inventare un modo tutto suo di saltare. Thurston non poteva vedere come gli altri e ha dovuto inventare il proprio modo di vedere. Il metodo di Fosbury consente di saltare piú in alto. Lavorare intenzionalmente per vedere meglio, come ha fatto Thurston, ci permette di vedere molto piú lontano, molto piú accuratamente, e di arrivare al cuore delle cose.

Quando pensiamo di vedere il mondo direttamente in tre dimensioni, stiamo inconsciamente assemblando le immagini bidimensionali fornite dai nostri due occhi. Questo modo di percepire lo spazio è imperfetto. Non si tratta di una percezione assoluta, ma di una percezione locale, relativa alla posizione da cui stiamo guardando e in cui l'effetto della prospettiva distorce gli oggetti. Peggio ancora: da dove guardiamo, la quasi totalità del mondo è nascosta.

Questo accesso ingenuo alla terza dimensione era precluso a Thurston. Ha lavorato per costruire il suo accesso, a modo suo, attraverso la forza del pensiero. Se Thurston ha ricevuto un dono è quello della pazienza e della determinazione. O, forse, dell'amore e della fiducia in sé stessi.

Il lavoro matematico non è una serie di intuizioni folgoranti e colpi di genio. È innanzitutto un processo di rieducazione basato sulla ripetizione degli stessi esercizi di immaginazione.

I progressi sono lenti perché il corpo ha bisogno di tempo per trasformarsi. Forzarlo non serve a nulla, ci si può far male. È sufficiente mantenere il ritmo delle sessioni, conservare il sangue freddo e perseverare anche quando si ha la sensazione di non progredire. È come andare dal logopedista o dal fisioterapista, ma completamente da solo e nella tua testa.

Vedere piú lontano

Thurston ha elaborato in modo consapevole e coscienzioso una propria capacità di immaginare il mondo. A forza di esercitarsi, di lavorare per cucire le immagini di dimensione 2 che aveva nella mente, alla fine ha imparato a vedere in dimensione 3.

Ma perché fermarsi lí? Con la stessa tecnica, si è reso conto che poteva andare piú lontano. Assemblando le immagini in dimensione 3, ha imparato

a vedere in dimensione 4. Assemblando le immagini in dimensione 4, ha imparato a vedere in dimensione 5[2].

Nella sola dimensione 3, l'approccio di Thurston gli ha permesso di vedere cose che nessuno prima di lui era stato in grado di vedere. La sua *congettura di geometrizzazione*, enunciata nel 1982, riguarda proprio la dimensione 3. Una congettura è un'affermazione matematica che si ritiene valida ma non ancora dimostrata. Fare una congettura significa pensare che qualcosa sia vero senza sapere perché. È, per sua natura, un atto visionario e intuitivo.

La congettura di Thurston è una scoperta straordinaria. Comprende la famosa congettura di Poincaré, formulata nel 1904 e rimasta insoluta per cosí tanto tempo che nel 2000 è stata inclusa nella lista dei «sette problemi del millennio», i sette enigmi matematici considerati piú difficili e profondi, ciascuno con un premio di un milione di dollari.

Nel 2003, Grisha Perel'man è riuscito a dimostrare la congettura di Thurston. In questo modo ha risolto anche la congettura di Poincaré. Parleremo di Perel'man e del premio da un milione di dollari nel capitolo 17.

Credere di vedere

Ma quando Thurston ha detto di aver visto in dimensione 4 e 5, cosa intendeva? Che cosa ha visto esattamente e in che senso dobbiamo intendere il verbo «vedere»?

Il modo migliore per rispondere a queste domande è capovolgerle. Cosa vediamo esattamente? Cosa vuol dire «vedere»?

Quando usiamo il verbo «vedere» in prima persona, tendiamo a sopravvalutarne il significato. Quando guardiamo davanti a noi, abbiamo l'illusione di un rapporto diretto con il mondo, come se gli occhi fossero una finestra magica aperta direttamente nella nostra coscienza e costituissero un accesso diretto alla realtà. Se questo è il significato che vogliamo dare al verbo «vedere», allora dobbiamo essere pronti a subirne le conseguenze: in questo caso, non vediamo mai veramente, ma piú semplicemente crediamo di vedere.

Ciò che vedete non è mai la pura realtà, ma un'interpretazione del mondo. In altre parole, si tratta di una ricostruzione, prodotta dalla memoria

e dall'immaginazione, sulla base di segnali visivi grezzi di cui non si è mai direttamente consapevoli. Il giorno in cui siete nati non sapevate ancora vedere, non perché i vostri occhi non funzionassero, ma perché il vostro cervello non aveva ancora imparato a dare un senso alle informazioni grezze che arrivavano attraverso il nervo ottico.

Questa capacità di ricostruzione vi consente ora di immaginare cose che non esistono e di avere l'impressione di vederle. Vedere e immaginare di vedere non sono due cose poi cosí diverse. Potete immaginare di vedere una formica grande come un cavallo. Potete vederla, descriverla e persino raccontare molte cose su di lei. Ma gli altri non avranno alcun modo di vedere direttamente la formica gigante nella vostra mente.

È come con i colori. Il rosso vi dà una sensazione molto specifica. Ma che cos'è esattamente la sensazione di rosso? Come faccio a sapere che questa vostra sensazione è uguale alla mia? Forse, in realtà, la domanda non ha nemmeno senso.

Dalton e il suo geranio

È cosí difficile descrivere e comunicare le nostre sensazioni visive che solo nell'autunno del 1792 qualcuno si è reso conto che la percezione biologica dei colori non è per tutti la stessa: circa l'8% degli uomini (e lo 0.6% delle donne) è daltonico[3].

Come è possibile che un fatto cosí enorme e facilmente dimostrabile sia passato inosservato per decine di migliaia di anni, da quando i nostri antenati hanno iniziato a parlare di colori?

Fu John Dalton, il grande fisico a cui dobbiamo l'idea moderna che la materia è costituita da atomi, a fare la scoperta partendo dal suo caso. Lo rivelò nel 1794, in un articolo scientifico il cui titolo sensazionalistico riflette il suo personale stupore: «Extraordinary Facts Relating to the Vision of Colours»[4].

Dalton appare quasi sorpreso, come se fosse stato il primo a scoprire l'esistenza di mancini e destrimani. Ma leggendo il suo articolo, si comprendono i meccanismi che hanno permesso il persistere dell'equivoco per millenni.

Dal punto di vista della scienza moderna, la storia è abbastanza semplice da raccontare. La nostra percezione del colore è spiegata dalla

presenza nella retina di cellule dedicate, chiamate *coni*. L'occhio umano ha normalmente tre tipi di coni, sensibili, rispettivamente, alla luce blu, verde e rossa. Percepiamo un'ampia gamma di sfumature di colore, ma solo attraverso le proporzioni relative di blu, verde e rosso (è per questo semplice motivo che gli schermi combinano questi tre colori di base in ogni pixel). Dalton era affetto da una mutazione genetica. Aveva solo due tipi di coni. Gli mancavano i coni sensibili al verde, il che gli impediva di percepire alcune tonalità. Ad esempio, aveva grandi difficoltà a distinguere il blu dal rosa. Solo che Dalton era cresciuto in un mondo in cui nessuno pensava che questo fosse possibile. In qualche modo aveva imparato a dare un nome a tutti i colori ai quali anche gli altri davano un nome, a farsene un'idea propria e a convincersi di averli visti davvero. Vedeva il mondo a colori, senza sospettare che gli mancasse qualcosa.

Raccontata dal punto di vista di Dalton, prima che venissero inventate le parole per spiegarla, la sua storia sembra una commedia dell'assurdo.

Dalton inizia con una confessione: per tutta la vita ha pensato che i nomi dei colori fossero sbagliati. Quando a volte le persone usavano la parola «rosso» invece di «rosa», Dalton lo trovava assurdo. Il rosa, per lui, assomigliava al blu, sicuramente non al rosso. Ma non osò mai dirlo a nessuno.

Nel 1790 Dalton si interessò di botanica. Aveva difficoltà a riconoscere il colore dei fiori, ma questo non lo sconvolgeva piú di tanto. Si fece aiutare. Quando chiedeva alle persone se un fiore fosse rosa o blu, poteva leggere nei loro occhi che si sentivano prese in giro. Non capiva perché, ma non cercò mai di scoprirlo. In fondo, si era abituato alla stranezza di tutte le conversazioni sui colori. L'equivoco sarebbe potuto continuare all'infinito se Dalton non avesse fatto la scoperta, nell'autunno del 1792, di un geranio dalle proprietà assolutamente straordinarie.

Questo geranio era considerato rosa. Tuttavia, alla luce del sole, appariva blu cielo. Fin qui nulla di straordinario: per Dalton questi due colori erano molto vicini. Ma quando Dalton ebbe l'idea di guardarlo a lume di candela, il geranio divenne perfettamente rosso, un colore che non aveva nulla a che fare con il rosa.

Dalton fu cosí stupito che invitò i suoi amici ad ammirare il geranio miracoloso. Quando gli amici gli dissero che il suo geranio non aveva nulla di particolare, Dalton rimase molto sorpreso. L'unica persona che sembrava capirlo era suo fratello. Questo fu il punto di partenza per il lavoro

sperimentale di Dalton sulla percezione dei colori che gli permise di dimostrare il daltonismo e il suo carattere ereditario.

Ci sono tre morali in questa storia «straordinaria».

La prima è che tra la percezione grezza e ciò che crediamo di vedere, abbiamo un enorme margine di manovra. Dalton trovava strani i nomi dei colori, ma questo non gli impedí di accettarli e interpretarli a modo suo. Aveva costruito una propria scala cromatica, necessariamente diversa da quella di una persona non daltonica, ma non necessariamente meno articolata. La cosa piú sorprendente è la sua ipersensibilità alle sfumature che separano il rosa dal rosso. Percepiva questa tonalità in modo piú intenso rispetto a un non daltonico, come un cieco che sviluppa una maggiore sensibilità al tatto e al suono (ci ritorneremo piú avanti).

La seconda morale riguarda il processo delle scoperte scientifiche. La forza di Dalton non è dovuta a un enorme potere di ragionamento, ma alla capacità di percepire che qualcosa non va e di non mollare la presa finché non lo ha risolto. Prima di diventare una grande scoperta scientifica, era solo una strana sensazione. Per decine di migliaia di anni, miliardi di persone daltoniche hanno provato la stessa strana sensazione senza riuscire a esprimerla a parole.

La terza morale è che possiamo convivere con persone che non vedono le stesse cose che vediamo noi, senza mai rendercene conto. La spiegazione è molto semplice: non possiamo vedere dentro la loro testa e, letteralmente, non possiamo vedere ciò che vedono loro.

Quando Dalton pensa che il blu assomigli al rosa, i non daltonici non lo prendono sul serio. Quando Thurston dice di vedere in dimensione 5, i non thurstoniani stentano a crederci.

Se volete essere sicuri che i daltonici non vi prendano in giro (o, se siete daltonici, se volete essere sicuri che i non daltonici non vi prendano in giro), c’è un modo semplice: il test di Ishihara, che si basa su immagini costituite da piccoli dischi di colori diversi. A seconda della vostra percezione che certi dischi siano dello stesso colore o meno, vedrete cose diverse in certe immagini. Su una delle tavole del test, i daltonici leggono chiaramente il numero 21, mentre gli altri leggono chiaramente il numero 74.

Non esiste un test di Ishihara per l’immaginazione. Non esiste un modo diretto per verificare che qualcuno sia in grado di visualizzare la dimensione 5.

Non so cosa abbia visto realmente Thurston, ma quando mi trovo di fronte al suo lavoro matematico, non ho il minimo dubbio che abbia visto molte cose che io non riesco a vedere. Il suo stile di scrittura dà l'impressione che stia solo cercando di condividerle con noi. Vorrebbe mostrarcele direttamente, ma sa che è impossibile. Dunque, non gli rimane che fare della matematica.

Vedere è cogliere ciò che è evidente

In un'intervista rilasciata al *New York Times*, Thurston riassume la questione in questo modo: «La gente non capisce come io possa visualizzare quattro o cinque dimensioni. Le forme a cinque dimensioni sono difficili da visualizzare, ma questo non impedisce di pensarle. Pensare è davvero come vedere»[5].

L'ultima frase merita tuttavia una precisazione. Nel prossimo capitolo parleremo delle sfumature tra il pensare in modo rapido e intuitivo e il pensare in modo lento e riflessivo. Per un matematico, «vedere» significa pensare in modo rapido e intuitivo, poter evocare liberamente un oggetto, direttamente, senza bisogno di riflettere, come se l'oggetto esistesse davvero, come se fosse lí davanti.

La facilità di accesso e l'immediatezza sono piú importanti della natura propriamente visiva della percezione. Vedere è cogliere ciò che è evidente. Questo è vero dal punto di vista etimologico (il termine «evidente» deriva dal latino *videre*, che significa «vedere») ed è vero anche nella vita di tutti i giorni: quando osservate un blocco di ghiaccio, è evidente che è freddo, vi sembra di vederlo, eppure non potete vedere direttamente la sua temperatura.

In ascolto del mondo

Ben Underwood è nato nel 1992 in California. Ha solo due anni quando la madre nota uno strano riflesso sul fondo di uno dei suoi occhi. Si tratta di un cancro alla retina. All'età di tre anni subisce l'asportazione di entrambi gli occhi. Il termine «ipovedente» viene talvolta utilizzato come eufemismo di cortesia. Nel caso di Ben Underwood, non c'è bisogno di nascondersi dietro un eufemismo. È cieco.

All’età di sette anni, Ben scopre di avere un potere magico: facendo dei clic con la lingua, può vedere il mondo che lo circonda.

La vera magia non esiste. Ben Underwood ha semplicemente imparato a vedere con l’ecolocalizzazione, come i pipistrelli e i delfini. Il suo clic è un sonar. Ogni oggetto invia un’eco caratteristica, che ci informa su posizione, dimensione, forma e materiale di cui è composto.

Che l’eco possa dirci qualcosa sullo spazio che ci circonda lo sapevamo già. Per distinguere una stanza da bagno da una cattedrale gotica, basta ascoltare. E forse avete già vissuto l’affascinante esperienza di svegliarvi una mattina e sapere, prima ancora di aprire gli occhi, che ha nevicato durante la notte, perché la consistenza del silenzio è cambiata.

Di contro, ciò che ci risulta molto piú difficile da credere è che sia effettivamente possibile ricostruire un’immagine affidabile e dettagliata del mondo che ci circonda solo grazie all’udito. Ma questo è ciò a cui Ben Underwood è arrivato.

Senza nessuno che gli dicesse come fare, senza nessuno che gli dicesse semplicemente che era possibile, ha sviluppato una reale capacità di «visione». I filmati lo mostrano mentre si muove liberamente, senza l’ausilio di un bastone e senza andare a tentoni. Compie azioni quotidiane, sale e scende le scale, attraversa le porte, nomina gli oggetti davanti a sé prima di prenderli in mano, cammina per strada, indica gli alberi e i loro

rami, va in bicicletta e sui pattini a rotelle, entra ed esce dalle automobili, gioca a basket.

Ben Underwood non è stato il primo non vedente a sviluppare capacità di ecolocalizzazione. Il fenomeno è conosciuto e documentato da quasi trecento anni. Ma nessuno prima di lui aveva portato la tecnica a questo livello di perfezione.

Ben Underwood ha superato i limiti di ciò che si pensava fosse umanamente possibile. Le sue capacità lo hanno reso famoso sia nella comunità scientifica sia presso il grande pubblico.

Da adolescente, è stato invitato al programma di Oprah Winfrey per raccontare la sua storia.

Cosa avrebbe potuto realizzare sviluppando la sua tecnica e condividendone i segreti? Non lo sapremo mai. Ben Underwood è morto all'età di sedici anni per una recidiva del cancro che gli aveva fatto perdere la vista[6].

Le leggi della plasticità mentale

Bill Thurston e Ben Underwood erano indubbiamente dei geni. Ma cos'è esattamente un genio? È una questione di intelligenza? Di curiosità? Di coraggio? Di volontà di vivere?

Sono profondamente ammirato di entrambi, ma non è solo per esprimere la mia ammirazione che ho scelto di raccontarvi la loro storia.

Il vero argomento è costituito dalle nostre convinzioni infondate sul funzionamento del cervello. È una nostra illusione che si possa accedere direttamente al mondo «reale» indipendentemente dalla rappresentazione che il nostro cervello può averne costruito. Ignorando l'enorme margine di manovra di cui disponiamo, assegniamo limiti insensati alla nostra intelligenza. La storia di Ben Underwood è cosí difficile da credere che, di riflesso, ci viene voglia di andare a controllare su internet se per caso non si tratti di una leggenda metropolitana. Questo dà solo una piccola idea delle favolose esperienze di cui ci priviamo.

La grande omissione della nostra cultura e della nostra educazione è non dirci che abbiamo una straordinaria plasticità mentale e che il nostro destino dipende in larga misura da ciò che decidiamo di farne. Il fallimento dell'educazione matematica è solo una vittima collaterale di questa

omissione. Chi non ha la fortuna di riscoprire casualmente i gesti che mettono questa plasticità al servizio della matematica è condannato a non capirla mai.

Al di là della matematica, l'ignoranza generale dei principi di base della plasticità mentale crea una gigantesca confusione. Senza pretendere di sapere o capire tutto al riguardo, ecco ciò che penso sia essenziale tenere a mente:

1. *Il potere della nostra plasticità mentale è assolutamente sconvolgente, quasi soprannaturale*. È sempre difficile credere a storie come quelle di Bill Thurston e Ben Underwood. Ci stupiscono, ma hanno un retrogusto di sensazionalismo che è molto difficile levarsi dalla mente. Ci si chiede dove sia la fregatura. Ma non c'è nessuna fregatura. Da un punto di vista biologico, tutto questo è perfettamente normale.

C'è una spiegazione semplice per la nostra incredulità, riconducibile alla natura inconscia dei meccanismi in gioco. Quando ci diciamo che Ben Underwood vede il mondo analizzando l'eco dei suoi clic, lo immaginiamo mentre esegue calcoli matematici molto complicati, al di là della portata di un normale essere umano. Questo è sia vero che falso. Se prendete un foglio di carta e scrivete le equazioni che determinano la riflessione delle onde sonore, non riuscirete a risolverle abbastanza velocemente per vedere il mondo che vi circonda. Che Ben Underwood potesse fare questi calcoli *a mente* non è credibile.

Nessun essere umano è in grado di risolvere queste equazioni nel modo in cui la scuola ci insegna a risolverle, applicando con coscienza un metodo meccanico. Ma rientra nella nostra plasticità mentale il fatto che abbiamo un modo *inconscio* di risolverle senza mai formularle, perché abbiamo allenato il nostro cervello a riconoscere una moltitudine di schemi sottili che sfuggono alla nostra consapevolezza.

Nessun matematico risolve i problemi matematici nel modo in cui la scuola ci insegna a risolverli. È biologicamente impossibile creare una matematica veramente nuova seguendo questo tipo di metodo, cosí come è biologicamente impossibile imparare a camminare mettendo per iscritto le equazioni della fisica.

Come pensate di essere riusciti a imparare a vedere, camminare e parlare, se non attraverso un processo di cui non eravate pienamente consapevoli?

Se giudicate i vostri apprendimenti di base con la stessa prospettiva che vi fa dubitare della possibilità di visualizzare la quinta dimensione o di vedere il mondo facendo dei clic con la lingua, arriverete alla stessa incredula constatazione: dal punto di vista razionale, imparare a vedere, a camminare e a parlare sembra impossibile. Eppure, ci siete riusciti.

2. *Il punto di partenza è sempre irrilevante*. Fate questo esperimento: chiudete gli occhi e chiedete a qualcuno di mettere il palmo della mano proprio davanti al vostro viso, di toglierlo e rimetterlo senza preavviso, mentre voi fate dei clic con la lingua. Potete sentire la presenza della mano, cosí come potete sentire la vicinanza di un muro se vi avvicinate fino a qualche centimetro.

Partendo da questa facoltà primitiva presente in voi in uno stato rudimentale, siete liberi di sviluppare la vostra facoltà di ecolocalizzazione. Ci vuole una forma di genialità per arrivarci da soli, ma non è la stessa cosa una volta che si sa che è possibile. Qualcuno può anche insegnarvelo, come fa Daniel Kish (che, cieco dall'infanzia come Ben Underwood, ha inventato la sua tecnica di ecolocalizzazione e ora la insegna a giovani non vedenti).

Avete gli stessi poteri di tutti gli altri. È una questione di volontà, pazienza e apertura al mondo.

3. *I progressi sono lenti, quasi impercettibili*. La plasticità mentale è per sua natura un fenomeno lento, invisibile, in cui i progressi sono impossibili da percepire in tempo reale. La consapevolezza di questi progressi è spesso brusca, proprio perché non li abbiamo previsti: avvengono a nostra insaputa, sullo sfondo e senza alcuno sforzo da parte nostra.

Per quanto riguarda l'ecolocalizzazione, sembra che si possano ottenere risultati significativi lavorando un'ora al giorno per qualche settimana. Alla fine, è un po' come imparare a guidare.

Questa scala temporale è abbastanza tipica. Che si voglia imparare un nuovo sport, una nuova lingua o un nuovo mestiere, è sempre la stessa cosa. Dovete mettervi in gioco ed essere disposti ad annaspare per un certo numero di ore, con la sensazione di essere degli inetti, fino a quando non scoprirete che, come per magia, non lo siete piú.

La ricetta perfetta per demoralizzarsi

Quando mio cugino Jérôme da adolescente comprò uno skateboard, di primo acchito ero stupito: «Ma perché compra uno skateboard se non sa andarci?» La prima volta che c'è salito, è subito caduto. Visto dall'esterno, un ragazzino che impara ad andare sullo skateboard è solo uno che passa il tempo a cadere. Solo che dopo un po' di tempo, come per magia, Jérôme ha iniziato a saper andare sullo skateboard. Non solo mi ha stupito. La cosa è diventata ingiusta e scandalosa, come se l'incompetenza fosse stata premiata.

Finché ignoriamo le leggi della plasticità mentale, sottovalutiamo gli altri e noi stessi. L'essenza della plasticità mentale è trasformare l'audacia in competenza.

Un processo lento e invisibile, con un risultato apparentemente impossibile: questa è la realtà biologica dei nostri meccanismi di apprendimento.

Per una spiacevole coincidenza, è anche la ricetta perfetta per demoralizzarsi. Ci vogliono molta fiducia in sé stessi e tanto sangue freddo per impegnarsi in un processo che è confuso, lento e dall'esito incerto.

È per questo che cosí spesso ci limitiamo a imparare solo ciò che è ufficialmente possibile imparare (cose per le quali esistono *corsi introduttivi* e di *formazione professionale*), ovvero ciò che si può imparare imitando gli altri e ciò che viene da sé.

Il resto, l'apprendimento segreto e invisibile, è considerato un «dono», un «talento», un potere «soprannaturale». Nessuno ci ha detto che avremmo imparato a vedere in cinque dimensioni, a orientarci con l'ecolocalizzazione o a riconoscere il sesso di cani e gatti solo guardandogli la testa, quindi non ci proviamo nemmeno.

Trascuriamo persino di prendere nota dei poteri «magici» che sviluppiamo senza cercarli: riconoscere la falsità nel tono della voce o in un sorriso, riconoscere l'odore delle persone che ci piacciono, o sapere cosa provano prima che lo dicano. Gli incapaci in matematica dimenticano persino che i videogiochi che imparano a padroneggiare in poche decine di ore sono cognitivamente cento volte piú difficili del programma di matematica del liceo.

Ricollegarsi alla capacità di apprendimento della prima infanzia significa smettere di credere a queste assurde storie dei doni e dei talenti.

Significa poter dedicare dieci o venti ore a qualcosa che forse è impossibile, o forse no, senza essere distratti dalla sensazione della propria

totale incapacità. Significa riscoprire il gusto di osservare il mondo senza preconcetti, di cogliere l'occasione solo per vedere, per giocare, perché si ha voglia di farlo.

Non sembra molto, dieci o venti ore. Vedere con l'ecolocalizzazione è un'idea attraente. Se venti ore sono sufficienti, non è un costo elevato. Tuttavia, per dedicarvi venti ore effettive, bisogna volerlo davvero.

Dieci o venti ore di vera esplorazione, lontano dalla nostra zona di comfort, sono sufficienti per scoprire in noi poteri insospettati. Ma quante volte avete passato dieci o venti ore a fare qualcosa di veramente nuovo?

Un'impresa di pirateria

È stato all'età di venticinque anni, un anno prima di terminare la tesi, che ho iniziato ad affrontare il lavoro matematico come un'attività di riprogrammazione puramente mentale, partendo dal presupposto che la mia plasticità mentale non avesse limiti.

O, per dirla piú schiettamente, è stato all'età di venticinque anni che ho scelto di lanciarmi in un'impresa intenzionale e sistematica di pirateria delle mie facoltà cognitive. La mia tecnica di base non era cambiata: *prestare attenzione alla dissonanza tra la mia intuizione e la logica*. Questa tecnica è rimasta il mio strumento per esplorare il mondo, come il clic di Ben Underwood.

Ciò che è cambiato in quel momento della vita è stato il mio sistema di credenze e la postura psicologica che ne derivava. Ho smesso di credere che il modo in cui pensiamo e vediamo il mondo sia un fatto prestabilito e che ognuno di noi abbia una quantità predefinita di intelligenza con cui deve arrangiarsi. Ho invece iniziato a credere che abbiamo la libertà di rimodellare costantemente il modo in cui vediamo e pensiamo, e di *costruire la nostra intelligenza* giorno dopo giorno.

Nel capitolo 16 racconterò alcuni degli esercizi di visualizzazione sempre piú estremi che mi hanno aiutato a progredire su questa strada.

La prima conseguenza pratica di questo cambiamento di approccio è che sono diventato un matematico creativo. Ho cominciato ad avere idee che nessun altro aveva, a vedere cose che nessun altro aveva visto, a dimostrare teoremi che nessun altro aveva dimostrato; dapprima teoremi facili e poi, nel corso della mia carriera, teoremi che all'inizio sembravano

ben al di là delle mie forze. La creatività matematica ha fama di essere un mistero impenetrabile. Nella mia esperienza, tuttavia, è emerso come un fenomeno naturale una volta adottata la giusta postura psicologica.

Ma ancora piú importante è stato l'impatto di questo nuovo approccio sulla mia vita personale. Se sono riuscito a forzare la mia corteccia visiva per cambiare il modo di percepire lo spazio, se sono riuscito a cambiare anche il modo di intendere la nozione di verità, che dire di tutto il resto? Che dire, ad esempio, di ciò che pensavo fossero i fatti della mia vita, le «qualità» e i «difetti» che la gente mi diceva facessero parte della mia cosiddetta «personalità»? Che dire della mia timidezza, dei miei blocchi, delle mie insicurezze e di tutte le cose che avrebbero dovuto immobilizzarmi? E della mia identità sociale? Come potrebbero tutte queste cose essere meno plastiche, meno malleabili, meno liberamente riprogrammabili della mia percezione dello spazio e della verità?

Ricordo con gioia il giorno in cui, proprio mentre uscivo per strada, mi è sembrato palese che queste cose non potevano essere prestabilite, che erano per forza riconfigurabili e che spettava a me provarci.

Credere di avere una personalità definita, mi sono detto, è solo superstizione.

11. *La palla e la mazza*

Una palla e una mazza costano in totale 1.10 dollari. La mazza costa 1 dollaro in piú della palla. Quanto costa la palla?

Questo problema è tratto da *Pensieri lenti e veloci*, il best seller dello psicologo Daniel Kahneman, vincitore del premio Nobel per l'Economia nel 2002 per il suo lavoro sui pregiudizi cognitivi.

Vi invito a fare il test con i vostri amici, funziona quasi sempre: la maggior parte delle persone risponde che la palla costa 10 centesimi. Questa non è la risposta giusta. Se la palla costasse 10 centesimi, la mazza costerebbe 1.10 dollari (dato che costa 1 dollaro in piú della palla) e la palla e la mazza insieme costerebbero 1.20 dollari.

Se gli spiegate perché la loro risposta è sbagliata, i vostri amici capiranno facilmente. Ma non necessariamente sapranno darvi la risposta giusta. Si inventeranno anche un sacco di scuse: è difficile fare i conti, devono scrivere il sistema di equazioni, sono pigri…

La risposta corretta è «5 centesimi». Se la palla costa 5 centesimi, la mazza costa 1.05 dollari e insieme la palla e la mazza costano 1.10 dollari.

La storia della palla e della mazza ha un ruolo centrale nella teoria di Kahneman perché ne è una perfetta illustrazione. Il suo punto di partenza è che abbiamo due sistemi cognitivi diversi, che lui chiama Sistema 1 e Sistema 2.

Il Sistema 1 è quello che permette di dare risposte immediate e istintive senza sforzo. Quando qualcuno vi chiede quanto fa 2 + 2, in che anno siete nati o se pesa di piú un elefante o un topo, non state a pensarci. Il vostro Sistema 1 vi permette di rispondere istantaneamente. Ma è anche il Sistema 1 che vi fa rispondere, sbagliando, che la palla costa 10 centesimi.

Il Sistema 2 è quello che dovete usare quando vi viene chiesto di calcolare 47 × 83, oppure quanti giorni sono passati da quando siete nati.

Potete farlo, ma ci dovete pensare. Forse avete anche bisogno di carta e penna. Una cosa è certa: non vi viene voglia di farlo. Anche se il Sistema 2 è piú affidabile e rigoroso, lo si usa solo quando non si ha scelta, perché pensare, calcolare e ragionare logicamente sono operazioni faticose.

La teoria di Kahneman può essere cosí riassunta:

1. Ogni volta che il nostro Sistema 1 ci dà una risposta, siamo tentati di usarla senza ricorrere al nostro Sistema 2, nemmeno per verificare che la risposta del Sistema 1 sia corretta. Poiché il Sistema 2 utilizza molte risorse ed energie mentali, preferiamo l'istinto. Biologicamente, abbiamo acquisito una preferenza per la pigrizia intellettuale.

2. In certe situazioni, il nostro Sistema 1 si sbaglia sistematicamente. Tutti commettiamo sempre gli stessi errori, come se lo schema di cablaggio del nostro cervello fosse difettoso. Questi sono i famosi «pregiudizi cognitivi» che Kahneman e la sua scuola si sono proposti di studiare. Ad esempio, tutti siamo portati a dire che la palla costa 10 centesimi.

Se il libro di Kahneman ha avuto cosí tanto successo, è perché va oltre una semplice affermazione teorica e propone un metodo concreto per evitare di cadere nella trappola.

Il suo consiglio è semplice: imparare a memoria l'elenco dei pregiudizi cognitivi presentato nel suo libro e, ogni volta che riconosciamo una di queste situazioni tipiche, forzarci a mobilitare il nostro Sistema 2 senza tener conto del nostro Sistema 1.

Credo che ci sia un modo migliore per farlo e ve lo spiego.

«Stai imbrogliando!»

La prima volta che ho sentito parlare di questa cosa della palla e della mazza è stato da un'amica che studiava scienze cognitive a Princeton. Aveva appena letto il libro di Kahneman e voleva fare il test con me.

Come la maggior parte delle persone, ho dato una risposta istintiva. Ho ascoltato il mio Sistema 1 senza sapere che si chiamasse Sistema 1. Senza riflettere, senza fare calcoli, ho dato la prima risposta che mi è venuta in mente: «5 centesimi».

Ho sentito che la mia amica si era un po' risentita per la risposta, ma non ne ho capito subito il motivo. Si è presa la briga di spiegare cosa c'era che non andava. Normalmente avrei dovuto rispondere «10 centesimi», o

prendermi alcuni secondi prima di rispondere «5 centesimi». Ma rispondere nel modo in cui avevo appena fatto, dire immediatamente «5 centesimi» senza prendermi il tempo di pensarci, non mi era permesso. Un tizio aveva persino vinto il premio Nobel per aver dimostrato che era impossibile. Ben presto, prima di cambiare argomento, la mia amica se ne uscí con una spiegazione, semplice, pragmatica e non del tutto sbagliata: «Be', stai imbrogliando, tu sei un matematico!»

Quando ho provato a rifare il test con i miei conoscenti, sono rimasto veramente stupito nel vedere cosí tante persone rispondere «10 centesimi», e ancor piú stupito dalla loro difficoltà nel trovare la risposta giusta dopo aver ammesso che quella iniziale era sbagliata. La cosa piú incredibile è che tutti mi dicevano che «dovevano fare dei calcoli», come se non fosse visivamente evidente che la risposta corretta era «5 centesimi».

Ero come Dalton con il suo geranio magico, solo che invece di avere un cono in meno, vedevo piú colori dei miei amici. L'altra differenza con Dalton, ovviamente, è che la spiegazione non aveva nulla di genetico.

Alla fine di questo capitolo vi spiegherò come vedo la risposta giusta e come potete imparare a vederla anche voi.

A o B

Dato che la storia della palla e della mazza cominciava a incuriosirmi, ho cercato di capire cosa impedisse ai miei amici di vedere la risposta giusta quando era cosí ovvia.

Un po' come Dalton, ho fatto una piccola indagine, e credo di aver trovato la spiegazione. Dopo averli sottoposti al test della palla e della mazza, ho posto ai miei amici la seguente domanda: «Immagina di dover prendere una decisione importante per la tua vita. Si può scegliere tra l'opzione A e l'opzione B. Il tuo intuito ti dice di scegliere A, ma la razionalità ti dice di scegliere B. Cosa fai?»

Ho posto questa domanda a piú di una dozzina di amici non matematici e quasi tutti hanno risposto, senza esitazione, di aver seguito il loro intuito e di aver scelto l'opzione A. Solo una persona ha risposto B. Un'altra ha esitato a lungo e non ha dato una risposta chiara.

Attenzione, non c'è alcuna garanzia di ottenere una percentuale cosí alta di A rifacendo l'esperimento per conto vostro. Il mio protocollo soffre di un

cosiddetto *bias* di selezione: i miei amici non sono necessariamente rappresentativi della popolazione generale e può darsi che le persone che ascoltano il loro intuito abbiano maggiori probabilità di diventare miei amici.

Non mi interessava la proporzione esatta tra A e B. Volevo solo sapere se qualcuno avrebbe dato la risposta che avrei dato io. Nessuno l'ha fatto.

La mia ipotesi è che la mia insolita risposta a questa domanda sia la chiave per diventare bravi in matematica e, tra l'altro, per rieducare molti dei miei pregiudizi cognitivi.

Un'ipotesi non cosí ragionevole

Kahneman afferma che migliaia di studenti americani hanno fatto il test della palla e della mazza e che «i risultati sono scioccanti». Nelle università meno selettive, il tasso di errore supera l'80%. Anche gli studenti di Harvard, del Mit e di Princeton danno la risposta sbagliata in oltre il 50% dei casi.

Il libro di Kahneman è affascinante, ma rimango perplesso quando vedo che contrappone la «risposta giusta» alla «risposta intuitiva», come se ci fosse una sola risposta intuitiva possibile e fosse necessariamente quella sbagliata. Scrive, ad esempio, che: «È ragionevole ritenere che la risposta intuitiva sia venuta in mente anche a coloro che hanno risposto giusto – ma sono riusciti a resistere al loro intuito»[1].

In sostanza, Kahneman trova ragionevole pensare che io non abbia il diritto di esistere. La mia opinione, va da sé, è che questa non sia un'ipotesi ragionevole.

Ma al di là della questione piuttosto secondaria sulla mia personale esistenza, l'aneddoto è soprattutto indicativo di un profondo conflitto tra le raccomandazioni di Kahneman e ciò che tutti i matematici sanno nel profondo. Sta a voi capire chi è piú credibile nel darvi consigli sul calcolo mentale.

Kahneman trova sconvolgente che il 50% degli studenti di Harvard, del Mit e di Princeton si affidi ciecamente a un'intuizione evidentemente ingannevole, e io sono sconvolto quanto lui.

Ma sono anche scioccato da un'altra cosa che Kahneman sembra considerare del tutto normale: com'è possibile che il 50% degli studenti di

Harvard, del Mit e di Princeton sia stato ammesso all'università nonostante un'intuizione cosí sbagliata?

Avendo studiato e insegnato in università altamente selettive, so che chi vede direttamente le risposte giuste ha un enorme vantaggio competitivo. Non capisco nemmeno come facciano gli altri a competere. Immagino che compensino con uno sforzo mostruoso di preparazione, uno sforzo di cui personalmente non sono capace e che solo a nominarlo mi fa venire il mal di testa.

Il consiglio di Kahneman è di individuare le situazioni in cui dobbiamo «resistere» alla nostra intuizione e sottometterci al Sistema 2. È un consiglio strano che viene da chi ha trascorso una vita a documentare la nostra avversione per lo sforzo e la fatica, la nostra preferenza per le risposte immediate e istintive, il nostro amore smodato per il Sistema 1 e il nostro odio per il Sistema 2.

Questa logica di addestramento, di apprendimento meccanico di regole preconfezionate, di sottomissione a un modo di pensare robotico, è precisamente la logica dell'educazione scolastica. Ma Kahneman è nella posizione giusta per sapere che non funziona.

Un altro punto mi preoccupa. È vero che dobbiamo essere prudenti nei confronti del nostro Sistema 1. Ma che dire del nostro Sistema 2? Personalmente, ho smesso di fidarmi al quarto anno della scuola primaria, quando mi sono reso conto che non ero in grado di mettere insieme tre righe di calcoli senza fare errori.

Ma la cosa piú inquietante di tutto questo è che Kahneman ragiona come se la nostra intuizione fosse un cablaggio inalterabile, senza possibilità di riconfigurarla e riprogrammarla. Se fosse vissuto ai tempi degli antichi romani, ci avrebbe certamente spiegato che è impossibile rappresentare mentalmente il risultato dell'operazione «un miliardo meno uno», perché questo numero supera le capacità dell'intuizione umana.

Il Sistema 3

Quando devo prendere una decisione importante per la mia vita, se l'intuito mi dice di scegliere l'opzione A e la razionalità mi dice di scegliere l'opzione B, mi dico che qualcosa non va e che non sono ancora pronto per prendere una decisione.

A questo punto è necessario ricorrere a quello che io chiamo il mio «Sistema 3».

Il Sistema 3 è l'insieme di tecniche di introspezione e di meditazione che mirano a stabilire un dialogo tra intuito e razionalità. Lo adoperate ogni volta che cercate di ricordare i vostri sogni, di dare un senso a quell'impressione fugace che vi ha lasciato uno strano sapore in bocca, di sbrogliare le vostre idee piú confuse e contraddittorie.

A diciotto anni, quando ho scoperto che le stupide immagini che avevo in testa tendevano ad autocorreggersi non appena mi sforzavo di descriverle e dargli un nome, quando ho preso l'abitudine di *ascoltare la dissonanza tra la mia intuizione e la logica*, ho posto il Sistema 3 al centro della mia strategia di comprensione della matematica. Questo approccio mi ha soddisfatto oltre ogni aspettativa.

Tutti conosciamo il Sistema 3 e ognuno lo usa almeno di tanto in tanto. Ciò che l'avventura matematica mi ha insegnato è che un uso volontario e radicale del Sistema 3 è possibile e che ha l'effetto di aumentare le nostre capacità intuitive ben al di là dei nostri presunti limiti cognitivi.

Nel corso degli anni, la ricerca sistematica dell'allineamento tra la mia intuizione e la logica è diventata il mio modo di capire il mondo, di capire gli altri e di capire me stesso.

In concreto, ecco cosa significa. Quando la mia intuizione mi dice A e la razionalità mi dice B, mi metto nella posizione del mediatore. Per un verso mi sforzo di tradurre in parole le mie intuizioni, di raccontarle come una storia semplice e comprensibile. Per un altro, cerco di sperimentare intuitivamente ciò che il ragionamento logico esprime, di sentire con il corpo gli interrogativi che si pone e le risposte che si dà. Mi chiedo se ci credo davvero. Mi muovo a tentoni. Ci vuole tempo, ma non è un vero sforzo. È piú simile a un processo meditativo, un'attività di sottofondo che può essere interrotta, ripresa, di nuovo interrotta, per poi diventare improvvisamente chiara l'indomani, o addirittura mesi e anni dopo.

Il punto è capire dove si sbaglia. Il mio intuito e la logica parlano la stessa lingua? Stanno parlando della stessa cosa?

La mia intuizione non è mai perfetta. Spesso è pertinente, ma in alcuni casi può comunque rivelarsi sbagliata. La buona notizia è che di solito il problema è risolvibile. Quanto alla logica, quella non si sbaglia mai. Almeno non ufficialmente. Solo che non dice necessariamente quello che credo che dica.

Alla fine, il mio intuito vince quasi sempre. Quando lo costringo ad ascoltare ciò che dice la logica, fa in modo di tenerne conto e di modificare il suo punto di vista. La logica è materia inerte, come un sasso. La mia intuizione è organica, è viva e in evoluzione.

Chiamare questo approccio «Sistema 3» è ovviamente stupido. Dovrebbe essere chiamato semplicemente *pensare* o *riflettere*. Ma il significato di queste parole è stato alterato da una tradizione castrante che vuole farci credere che dobbiamo pensare contro la nostra intuizione. Ci hanno detto che l'intuizione è da sempre nemica della ragione, che il dialogo è impossibile e che riflettere significa sottomettersi ciecamente al Sistema 2.

Personalmente non sono in grado di pensare contro la mia intuizione e dubito fortemente della sincerità di coloro che affermano di poterlo fare.

Nel capitolo 3 ho detto che l'intuizione è la vostra risorsa intellettuale piú potente. Tuttavia, a rischio di infrangere i vostri sogni, devo farvi una rivelazione: la vostra intuizione non è un fluido magico, né la vostra buona stella, né la mano di Dio sulla vostra spalla. La sua natura è molto piú banale. È la manifestazione tangibile di una realtà certamente invisibile ma perfettamente concreta e materiale: è il groviglio di connessioni sinaptiche tra i vostri neuroni, che il cervello costruisce e riorganizza continuamente fin dall'inizio della vostra vita fetale.

Il cervello ha tanti neuroni quante sono le stelle della Via Lattea. Ognuno di questi neuroni è connesso, in media, a migliaia di altri neuroni. Questa trama di centomila miliardi di interconnessioni è la rete delle vostre associazioni mentali. La sua struttura è il vostro modo di dare un significato alla marea di informazioni grezze che si riversano continuamente nel cervello. È, letteralmente, la vostra visione del mondo. Tutto ciò che avete visto, sentito, provato, immaginato o desiderato, tutta la vostra esperienza, tutto ciò che sapete, tutto ciò che sopravvive nella vostra memoria, è codificato in questo groviglio. Quando la vostra intuizione parla, si esprime in nome di tutto questo.

La vostra intuizione sarà sempre piú potente e meglio informata del piú sofisticato ragionamento linguistico. Tuttavia, non è infallibile. Se il vostro intuito vi dice che la palla costa 10 centesimi, si sbaglia.

La mia intuizione non è piú infallibile della vostra. Si sbaglia di continuo. Ma ho imparato a non vergognarmene mai. Non disprezzo i miei errori, non li reprimo, non do per scontato che rivelino una mia inferiorità

intellettuale o dei pregiudizi cognitivi codificati nel mio cervello. Al contrario. Non c'è niente di piú stimolante di un errore grossolano e clamoroso: è sempre un segno che non sto vedendo le cose dalla giusta prospettiva e che è possibile vederle meglio. Quando riesco a identificare un errore nella mia intuizione, so che le mie rappresentazioni mentali si stanno già riconfigurando.

A livello mentale, la mia intuizione è quella di un bimbo di due anni: non ha complessi e vuole sempre imparare. Se smettete di maltrattare la vostra, vi accorgerete che è esattamente come la mia: vuole solo crescere.

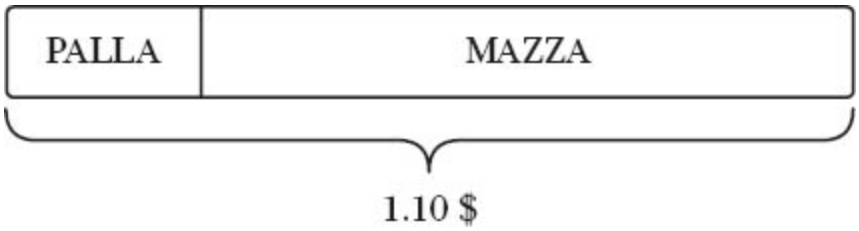
Il prezzo di una palla

Poiché scrivo come una gallina e mi distraggo facilmente, ho sempre avuto la tendenza a fare errori di calcolo.

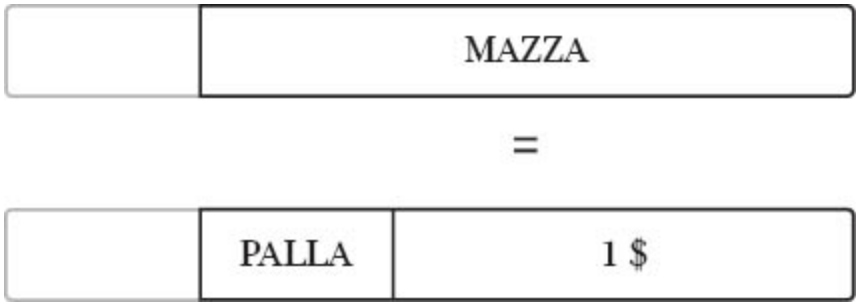
In terza media ho scoperto che l'unico modo per cavarmela era controllare ogni tre righe per essere sicuro che quello che scrivevo avesse senso e che ci credessi davvero. In altre parole, ho imparato a usare costantemente il mio Sistema 1 per supervisionare il lavoro del mio Sistema 2. Da allora non sono piú in grado di manipolare oggetti matematici verso i quali non ho una qualche forma di intuizione.

A che punto ho smesso di visualizzare i numeri dando priorità alla loro forma decimale? Non lo ricordo. Ma probabilmente è stato piú o meno nello stesso periodo. La scrittura decimale è comodissima per fare calcoli scritti, ma lo è molto meno quando si vuole avere un'idea intuitiva della validità di questi calcoli. Il vantaggio del Sistema 1 è che sfugge ai vincoli del linguaggio e della scrittura.

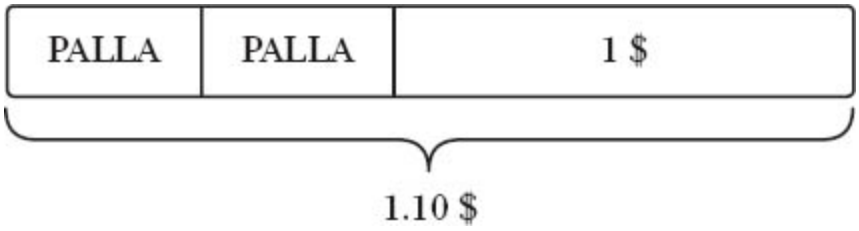
A seconda del contesto, ho diversi modi di visualizzare i numeri. Ad esempio, tendo a visualizzare i prezzi come lunghezze. Quando la mia amica mi ha detto che la palla e la mazza insieme costavano 1.10 dollari, ho tradotto immediatamente le sue parole in un'immagine mentale che assomigliava a questa:



Quando mi ha detto che la mazza costava un dollaro in piú della palla, l'ho interpretata cosí:



Poi le due immagini si sono unite nella mia mente, producendo una cosa del genere:



Se questo è il modo in cui visualizzate il problema, non occorre essere molto intelligenti per capire che la palla costa 5 centesimi.

Di per sé, un'immagine mentale non è né buona né cattiva, ma ha valore solo per ciò che permette di capire. Ci sono innumerevoli modi per visualizzare un problema e non penso che il mio sia particolarmente interessante. Il mio intuito numerico non ha nulla di speciale. Non sarei in grado di fare i conti se la palla e la mazza insieme costassero 2 734.18 dollari e la mazza costasse 967.37 dollari in piú della palla.

Il motivo per cui ho queste immagini in testa è che nella vita ho fatto molti errori di calcolo. Invece di concludere che non ero bravo in

matematica, ho semplicemente cercato modi piú semplici di vedere le cose per potermi ritrovare in quello che stavo scrivendo.

Con il tempo, grazie a questo approccio, ho costruito un'ampia varietà di immagini mentali che oggi mi aiutano a comprendere meglio il mondo.

Se volete imparare a capire subito che la palla costa 5 centesimi, vi suggerisco di procedere come farebbe un matematico di fronte a un'idea nuova e incomprensibile. Piuttosto che memorizzare il mio modo di vedere le cose, esercitatevi a costruire le immagini che piú vi aggradano. Il messaggio piú importante, quello che non dovete mai dimenticare è, in sintesi, questo:

1. L'intuizione è riprogrammabile.
2. Qualsiasi disallineamento tra intuizione e capacità di ragionamento è un'opportunità per costruire *nel vostro spazio mentale* un nuovo modo di vedere le cose.
3. Non aspettatevi di fare tutto in una volta, in tempo reale. Arricchire le immagini mentali significa riorganizzare le connessioni tra i neuroni. Questo processo è organico e ha un suo ritmo.
4. Non cercate nemmeno di forzare. Iniziate con ciò che già capite, che riuscite a vedere, che trovate facile, e giocateci. Cercate di interpretare intuitivamente le fasi del calcolo che avreste fatto per iscritto. Se può essere d'aiuto, fate dei disegni su un foglio di carta.
5. Con il tempo e la ripetizione, questa attività aumenterà le vostre capacità intuitive. Non sentirete di fare progressi fino al giorno in cui la risposta giusta diventerà improvvisamente evidente.

Ci vorranno diverse sessioni di allenamento. Quante di preciso, non lo so. Non è necessario affaticarsi, è meglio moltiplicare le sessioni brevi di cinque minuti, ripensandoci sotto la doccia o mentre si cammina per strada. Soprattutto, prendetevi il tempo necessario. Va bene pensarci una volta alla settimana o una volta al mese. La cosa piú importante è insistere e non arrendersi mai. Prima o poi arriverà.

Risolvere il problema non è che un pretesto. L'importante è rendersi conto che si ha il potere di rieducare l'intuizione, di acquisire fiducia nel proprio corpo e nei propri pensieri.

Niente di tutto questo vi dovrebbe sorprendere. Risolvere il problema della palla e della mazza è come stare su una tavola da windsurf. Kahneman

dice che la prima volta che si sale su una tavola da windsurf si cade in acqua, e ne deduce che gli esseri umani hanno un senso dell'equilibrio strutturalmente non adatto alla pratica intuitiva del windsurf. Il suo consiglio è di uscire dall'acqua e imparare a memoria le leggi della fisica. Il mio consiglio è di tornare sulla tavola da windsurf.

Il pensiero elettrico, meccanico, vegetale

Un'idea centrale di questo libro è che la nostra cultura ha trasmesso false credenze sul funzionamento del nostro cervello e che queste false credenze allontanano le persone dai semplici gesti mentali che ci permettono di diventare molto bravi in matematica.

Quando ci dicono che certe verità sono per loro stessa natura controintuitive è come dire che non le capiremo mai. Questo è un modo per scoraggiare chiunque. Niente è controintuitivo per natura: ciò che è controintuitivo lo è solo transitoriamente, finché non troviamo un modo per renderlo intuitivo.

Comprendere significa rendere intuitivo qualcosa a sé stessi. Spiegare significa offrire agli altri modi semplici per rendere quel qualcosa intuitivo a loro.

Tutto ciò non sminuisce l'importanza del lavoro di Kahneman. I pregiudizi cognitivi che identifica sono realtà umane sorprendenti e di grande importanza sociale. Anche se non tutti abbiamo gli stessi pregiudizi, tutti abbiamo dei pregiudizi e alcuni pregiudizi sono piú diffusi e piú problematici di altri.

La distinzione di Kahneman tra Sistema 1 e Sistema 2 ha il pregio di essere semplice. In un certo senso, riprende la classica opposizione tra cervello destro e sinistro, ma in una versione modernizzata, priva di incongruenze anatomiche. Si tratta ovviamente solo di una metafora, ma è eloquente e aiuta a spiegare i diversi modi in cui mobilitiamo le nostre risorse mentali.

Concludiamo questo capitolo con una sintesi delle caratteristiche principali del Sistema 3, il grande assente nella teoria di Kahneman. Nel capitolo 19 torneremo alla struttura fisica del nostro cervello e ai suoi principi di funzionamento, che forniscono un'interpretazione biologica del

Sistema 3 e della sua efficacia. La nozione di Sistema 3 è una buona metafora della natura reale del lavoro matematico.

Il Sistema 1 è la nostra capacità intuitiva. Possiamo essere inclini a descriverlo con una metafora elettrica: con la nostra intuizione, crediamo di pensare alla *velocità della luce*. Questo non è del tutto falso. Il nostro cervello non è un circuito elettrico in senso stretto, ma il segnale che viaggia lungo i neuroni è effettivamente di natura elettrica.

	Sistema 1	**Sistema 2**	**Sistema 3**
Nome	Intuizione	Ragionamento	Pensiero?
Verbo	Vedere	Seguire delle regole	Riflettere? Meditare?
Aggettivo	Istintivo	Procedurale	Introspettivo
Caratteristica del risultato	Immagine mentale	Valore calcolato	Aggiornamento del Sistema 1
Velocità	Rapida	Lenta	Molto lenta
Scala temporale	Immediatezza	Secondi e minuti	Minuti, ore, giorni, mesi, anni
Metafora	Elettrica	Meccanica	Vegetale
Vantaggi	Velocità, facilità, veridicità	Rigore	Forza, distensione, fiducia in sé
Limiti	Imprecisione e incoerenza	Disumanizzazione	Asincronia

Sistemi 1, 2 e 3: le tre velocità del pensiero

Il Sistema 2 è la nostra capacità di ragionamento rigoroso. Lo immaginiamo in termini meccanici, con ingranaggi o cose del genere. Ciò non corrisponde ad alcuna realtà biologica. Quello che siamo biologicamente capaci di fare è immaginare di essere dei robot e di applicare meccanicamente sequenze di istruzioni imparate a memoria. La cosa vantaggiosa è che, con le giuste sequenze di istruzioni, siamo in grado di fare ragionamenti logici e calcoli corretti. Ma è cosí sgradevole e

innaturale che di solito crolliamo dopo pochi secondi, al massimo qualche minuto. Siamo dei pessimi robot: non andiamo cosí veloci e facciamo molti errori.

Il Sistema 3 è talmente trascurato dalla nostra cultura che non sono riuscito a trovare una parola adeguata per definirlo. Come ho già detto, avrei voluto dire che il Sistema 3 è la nostra capacità di riflettere. Ma il verbo «riflettere» non vuol dire granché nel momento in cui è inteso come un'ingiunzione a sottomettersi al Sistema 2.

L'attività del Sistema 3 è una forma di meditazione, ma anche questo termine è troppo vago. Non tutta la meditazione è un'attività del Sistema 3. Il principio del Sistema 3 è quello di stabilire un dialogo tra il Sistema 1 e il Sistema 2 per comprendere e risolvere i loro disallineamenti. Non si tratta di una meditazione libera, ma di una meditazione vincolata dal principio di non contraddizione. Il suo obiettivo finale è quello di aggiornare il Sistema 1 tenendo conto dei risultati del Sistema 2.

È inoltre necessario distinguere il Sistema 3 dalla capacità del Sistema 1 di aggiornarsi senza un'azione intenzionale da parte nostra. La nostra plasticità mentale si spiega con la riconfigurazione permanente della rete sinaptica: i nostri circuiti mentali si evolvono in risposta alle nostre esperienze. I neuroni sono come materiale vegetale che può crescere e sviluppare radici sempre piú profonde.

Ogni volta che pratichiamo una particolare attività, abituiamo il nostro Sistema 1 alle peculiarità di quell'attività. Quando proviamo a stare in piedi su una tavola da windsurf, abituiamo il nostro Sistema 1 alla dura realtà della fisica e in questo modo costruiamo il nostro istinto per il windsurf. Con il Sistema 3, abituiamo il nostro Sistema 1 alla dura realtà della coerenza logica e costruiamo il nostro istinto per la verità.

Il grande equivoco dell'insegnamento della matematica deriva dal fatto che tutte le manifestazioni visibili della matematica – il suo linguaggio disorientante, le sue notazioni incomprensibili, i suoi ragionamenti psicorigidi – sembrano appartenere all'universo del Sistema 2.

Le persone che non capiscono la matematica sono quelle che la prendono alla lettera. Si scoraggiano in pochi minuti o si lanciano in uno sforzo masochistico che non ha alcuna possibilità di successo.

Nel frattempo, in privato, le persone brave in matematica fanno affidamento sul Sistema 3. Le loro immagini mentali esistono solo nella loro testa. Il piú delle volte, non sono nemmeno consapevoli di aver

lavorato per crearle. Hanno semplicemente dedicato qualche minuto al giorno a porsi le domande giuste.

12. *I trucchi non esistono*

Un giorno qualunque negli Stati Uniti dei primi anni Cinquanta. Una famiglia normale su una strada normale. Il padre è alla guida, i due bambini sono sui sedili posteriori. Per evitare che litighino, il padre li intrattiene con degli indovinelli:

«Qual è la somma dei numeri interi da 1 a 100?».

Il bambino piú piccolo ha cinque anni. Risponde in pochi secondi: «5 000». Il padre gli dice che è quasi giusto. Il bambino ci pensa ancora per qualche secondo e alla fine dà la risposta giusta: «5 050».

Quel bambino di cinque anni è Bill Thurston. L'aneddoto[1] fa sorridere chi ci vede la riproposizione di una famosa storia su Carl Friedrich Gauss (1777-1855), il «principe della matematica». Anche se si tratta probabilmente di una leggenda, questa vecchia storia è ben nota e il padre di Thurston deve averla sentita raccontare.

Gauss è stato uno dei piú grandi matematici della storia, uno di quelli che può essere collocato accanto a Talete, Pitagora, Euclide, Archimede, al-Khuwārizmī, Cartesio, Eulero, Newton, Leibniz, Riemann, Cantor, Poincaré, von Neumann, Grothendieck e pochi altri. Era cosí straordinariamente brillante e creativo che i suoi contemporanei non potevano credere che la sua intelligenza fosse frutto di un cervello umano biologicamente normale. Era, in un certo senso, l'Albert Einstein del suo tempo.

È andata a finire proprio come con Einstein: quando Gauss morí, qualcuno pensò bene di asportarne il cervello nella speranza di carpirne i segreti. Due secoli dopo, il cervello di Gauss è ancora in un barattolo nei depositi dell'Università di Gottinga. Nessuno ci ha trovato nulla di interessante.

La leggenda narra che all’età di sette anni il piccolo Gauss fece prendere un grande spavento al suo insegnante. L’insegnante aveva chiesto alla classe di calcolare la somma dei numeri interi da 1 a 100, pensando che questo gli avrebbe concesso un buon quarto d’ora di pace. Non aveva previsto che uno dei bambini gli avrebbe dato la risposta in pochi secondi.

Avevo diciassette anni quando il nostro insegnante di matematica dell’ultimo anno ci raccontò questa storia che ci colpí molto. Non capivamo come Gauss potesse calcolare cosí velocemente. Di fronte a un genio del genere, ci sentimmo tutti dei mediocri.

La spiegazione che ci diede il nostro professore fu che c’era un «trucco». Si vuole calcolare la somma dei numeri interi da 1 a 100, cioè l’addizione

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Il trucco consiste nel considerare il doppio di questa somma, contando due volte ogni numero intero da 1 a 100, e nel disporre questa doppia somma su due righe, in questo modo:

$$\begin{gathered} 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ + 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1. \end{gathered}$$

Che idea stravagante! Perché prendere in considerazione la somma due volte? Perché disporre i numeri in questo modo? Può sembrare strano, ma è ammissibile. In ogni caso, ciascuno dei numeri da 1 a 100 compare due volte. Il valore della doppia somma è quindi il doppio del numero che stiamo cercando.

Invece di guardare le righe, osservate ora le colonne. Ci sono 100 colonne e in ognuna di queste colonne ci sono due numeri la cui somma è sempre 101. Sembra magico, ma è vero. Quindi la doppia somma è 100 per 101, ossia 10 100. Il numero che stiamo cercando è la metà di questo, quindi 5 050.

Non vergognatevi di avere bisogno di rileggere questo ragionamento piú volte prima di trovarlo convincente. Come tutti i ragionamenti matematici, ha qualcosa di strano e inquietante. Finché non riusciamo a trovarlo evidente, bisogna decifrarlo riga per riga, il che richiede tempo e concentrazione.

I passaggi del ragionamento sono abbastanza semplici e dovrebbero permettervi di arrivare a queste tre conclusioni:

1. È una dimostrazione valida che la somma dei numeri interi da 1 a 100 è 5 050.
2. È plausibile che una persona dotata di buone capacità di calcolo mentale possa farlo a mente in pochi secondi.
3. Ma come può essere nata un'idea del genere dalla mente di un bambino di sette anni o, nel caso di Thurston, di cinque?

In ogni caso, queste sono le conclusioni che ho tratto quando avevo diciassette anni. Ho anche dedotto che la matematica non faceva per me, perché era riservata a quelle persone diverse, ai geni, il cui cervello funzionava in modo diverso dal mio e poteva sfornare idee cosí incredibili.

Il mio professore dell'ultimo anno era un ottimo insegnante, che mi piaceva e che mi ha insegnato moltissimo. Ma quando un giorno ci ha parlato di «trucchi», ci ha trasmesso il messaggio sbagliato.

I trucchi non esistono. Non ci sono mai stati e non ci saranno mai. Credere nell'esistenza di trucchi è dannoso quanto credere nell'esistenza di verità intrinsecamente controintuitive. Sono queste le due superstizioni centrali dell'ideologia del Sistema 2: la convinzione che la nostra intuizione sia inutile e che dobbiamo applicare meccanicamente metodi che non comprendiamo.

Naturalmente, può succedere che le cose funzionino senza che se ne capisca il perché. È persino abbastanza comune. Ma si tratta sempre di una situazione transitoria in attesa di una spiegazione.

Credere che dal punto di vista strutturale esistano dei trucchi significa accettare l'idea che ci sono cose che non si capiranno mai e che si dovranno imparare a memoria. È confondere la verifica riga per riga di una dimostrazione con la sua comprensione intuitiva. Si tratta di entrare in una relazione di sottomissione al Sistema 2. È accettare una divisione dei ruoli che è disonesta e umiliante: i grandi geni trovano i trucchi, mentre, da parte vostra, siete bravi solo a verificare che le addizioni siano corrette.

Se si tratta di verificare che la somma dei numeri interi da 1 a 100 fa davvero 5 050, che importa? Quello che ci interessa è imparare a pensare come Gauss e Thurston.

La trappola del linguaggio

Per capire cosa c'è dietro i «trucchi» matematici, il modo piú semplice è seguire una ricetta per la torta di banane, ad esempio questa:

Ingredienti: 4 banane, 4 uova, 250 g di farina, 180 g di burro, 120 g di zucchero, 1 bustina di zucchero vanigliato, 1 bustina di lievito in polvere.

1. *In un piatto, schiacciare le banane con una forchetta e metterle da parte.*
2. *Mescolare le uova con lo zucchero, quindi aggiungere la farina, il burro, il lievito e lo zucchero vanigliato.*
3. *Incorporare le banane al composto.*
4. *Infornare a 180 gradi per 40-50 minuti.*

Visualizzate le diverse fasi della ricetta:

– Si inizia andando a comprare le banane. Le avete in mano. Arrivate alla cassa per pagare. Riuscite a vedere le banane?
– Siete all'inizio della fase 1. Le banane sono ora nel piatto. Avete una forchetta in mano e state per schiacciarle. State sempre vedendo le banane?

Tra questi due passaggi avete modificato la vostra immagine mentale. Poco prima di schiacciare le banane, le avete sbucciate mentalmente. Dietro i cosiddetti trucchi, di solito c'è un'operazione come questa: un cambiamento di immagine mentale che avviene in un istante, per motivi «ovvi» che non sono evidenti a tutti.

Se avete familiarità con le banane, è ovvio che dovete sbucciarle prima di schiacciarle. Quando non si è mai maneggiato una banana, la cosa cessa di essere ovvia. Il testo delle ricette non riporta mai tutti i passaggi necessari. Mancano sempre i dettagli essenziali, i cosiddetti «trucchi». Ecco perché molte persone preferiscono guardare video di cucina piuttosto che leggere le ricette.

Conoscete le banane fin dall'infanzia. Si potrebbe anche dire che con questo frutto avete un rapporto intimo. Le conoscete al di là del linguaggio. Sapete molte cose su di loro che non avete mai detto a nessun altro. Conoscete a memoria il filamento che corre lungo la polpa, anche se non sapete come si chiama. Questo filamento non vi è mai servito, ma vi ha colpito per il suo aspetto e le sue proprietà. Sapete anche, senza aver mai osato ammetterlo, che nulla sulla Terra si spappola in modo cosí morbido e appagante come la polpa delle banane. La parola «banana» non evoca solo

un’immagine mentale, ma una moltitudine di possibili immagini mentali. In un attimo, senza sforzo e senza che nessuno vi dica come, scegliete sempre l’immagine giusta. Schiacciare le banane senza sbucciarle è talmente stupido che la sola idea vi fa ridere. È la tipica cosa stupida che solo i robot possono fare.

Quando Gauss o Thurston devono sommare i numeri interi da 1 a 100, scelgono il modo giusto di visualizzarli, quello che renderà piú facile il calcolo. Lo trovano in un attimo, senza sforzo e senza che nessuno gli dica come fare. Sanno come attivare la loro familiarità con i numeri nello stesso modo in cui voi attivate la vostra familiarità con le banane. Si tratta esattamente della stessa forma di intelligenza.

In matematica, l’apparizione di un miracolo o di un’idea che spunta dal nulla è sempre segno che manca un’immagine. Il vostro modo di vedere le cose non è giusto, oppure è incompleto, e ce n’è uno migliore, piú semplice e piú chiaro che ancora non conoscete e che, forse, nessuno conosce. Cercare e trovare questo giusto modo di vedere è la base del processo matematico. È la fonte principale del piacere che se ne ricava.

Ogni volta che si parla di trucchi, è come se qualcuno ci ordinasse di smettere di pensare proprio nel momento in cui la faccenda inizia a farsi interessante.

L’ironia è che nello stesso momento in cui avete acquisito dimestichezza con le banane, in quel remoto momento della vostra infanzia, lo avete fatto anche con i numeri. È stato questo livello di familiarità che vi ha permesso di imparare a contare. Oggi avete perso questo rapporto intimo con i numeri. Quando siete usciti dall’infanzia, siete caduti in quella che chiamo la *trappola del linguaggio*, ed è questo che vi impedisce di «vedere» la somma dei numeri interi da 1 a 100 come la vedono Gauss e Thurston.

La trappola del linguaggio è la convinzione che dare un nome alle cose sia sufficiente per farle esistere e ci solleva dallo sforzo di immaginarle.

Questa convinzione è una tipica manifestazione dell’ideologia del Sistema 2. Ci dicono che pensiamo con le parole e che non serve a niente andare oltre le parole. Questa idea semplificatoria pone parecchi problemi, ed è al limite della menzogna. Dare un nome alle cose permette senz’altro di poterle evocare, ma non di renderle presenti a livello mentale con quell’intensità e quella chiarezza che ci permettono di pensare e di creare.

«Non pensate all’elefante rosa». Questa battuta diverte molto i linguisti perché, in un certo senso, ci costringe a pensare proprio a un elefante rosa. Ma questo modo passivo e riluttante di pensare agli elefanti rosa non è il modo per entrare in intimità con loro e capirli davvero. Sforzatevi di immaginare un elefante rosa a grandezza naturale proprio davanti a voi. Prendetevi il tempo necessario per guardarlo e studiarlo da vicino. Questa immagine prodotta intenzionalmente sarà molto piú profonda, ricca e accurata di quella moscia immagine mentale che avevate all’inizio del paragrafo. Quando ci concediamo di dar libero sfogo all’immaginazione, non ci sono quasi piú limiti.

È questo sforzo dell’immaginazione che permette di uscire dalla trappola del linguaggio e di risolvere i problemi matematici. Questa attività è al centro del Sistema 3. Implica la ricerca intenzionale di vedere, senza riserve e senza mezze misure, con un impegno fisico totale.

Quando leggete «la somma dei numeri interi da 1 a 100», se vi accontentate di quella moscia immagine mentale, non vedrete niente.

Invece di lasciarvi cullare dalle parole, costringetevi a pensare che la somma è fisicamente presente davanti a voi. Sforzatevi di immaginare i numeri interi da 1 a 100 presenti fisicamente, incarnati nel mondo reale, tranquillamente allineati davanti a voi. Se riuscite a vederli e vi date il tempo di osservare bene la scena, troverete un modo per calcolare la loro somma.

Per darvi la possibilità di capirlo da soli, potete fare una pausa prima di continuare a leggere.

Vedere in grande

In «On Proof and Progress in Mathematics», il testo già citato nel capitolo 6, Thurston dà un consiglio sorprendente – che non ho mai trovato altrove – sulle dimensioni degli oggetti matematici.

Quando li immaginiamo, possiamo scegliere di vederli come «piccoli oggetti nelle nostre mani», come «strutture a grandezza umana», o come «strutture che ci inglobano e all’interno delle quali possiamo muoverci». Da un punto di vista logico, questo non dovrebbe fare alcuna differenza. Ma Thurston sostiene che le dimensioni contano: «Tendiamo a pensare in modo piú efficace con immagini di dimensioni maggiori: è come se il nostro

cervello prendesse piú seriamente le cose piú grandi e vi dedicasse piú risorse».

E se coloro che sono convinti di non avere un'intuizione geometrica commettessero semplicemente l'errore di immaginare figure troppo piccole, sulle quali è impossibile vedere qualcosa?

In ogni caso, l'osservazione di Thurston si applica molto bene agli elefanti: immaginate un elefante piccolo che sta nella vostra mano, e ora immaginate un elefante a grandezza naturale, con l'aria goffa e soprattutto di cui non cercate l'attenzione: questa immagine non impegna le vostre risorse cognitive allo stesso modo.

La trappola linguistica è la versione estrema del fenomeno descritto da Thurston. Un'espressione come «la somma dei numeri interi da 1 a 100» è fondamentalmente un modo conveniente per riferirsi a un oggetto matematico specifico. Permette di parlarne, ma è anche un modo per liberarsene, per metterlo a distanza in modo che non dia piú fastidio.

Pensate di vedere questa somma, ma in realtà non la vedete. Non ne avvertite la presenza. Non la prendete sul serio.

Questa somma può anche essere scritta come 5 050. Il grande vantaggio della scrittura decimale è la sua compattezza. È discreta, pratica, facile da dire e da scrivere. Lo svantaggio di questa forma di rappresentazione mentale è che il numero si allontana, diventa minuscolo, quasi invisibile.

Un'uguaglianza matematica afferma sempre che due espressioni apparentemente diverse si riferiscono in realtà a uno stesso oggetto. Se ci lasciamo cullare dal linguaggio, se confondiamo le parole con gli oggetti che designano, non ci diamo alcuna possibilità di «vedere» le uguaglianze matematiche.

L'unico modo per farlo è andare oltre le parole. Sostituire «la somma dei numeri interi da 1 a 100» con «1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100» è un buon inizio. Potreste avere la sensazione di vedere la somma in modo piú tangibile, piú concreto. Ma sarà sempre un'illusione. In realtà, vi manca ancora una buona parte dei numeri, tutti quelli che si nascondono dietro i puntini di sospensione. I simboli matematici sono come le parole, appartengono al linguaggio. Anche loro devono essere superati.

Per riuscire a vedere la somma nella sua interezza, senza scorciatoie o abbreviazioni, per prenderla sul serio e darle il posto che si merita, bisogna uscire dalla trappola del linguaggio e immaginare la somma fisicamente presente, in una grandezza reale, proprio lí davanti a noi.

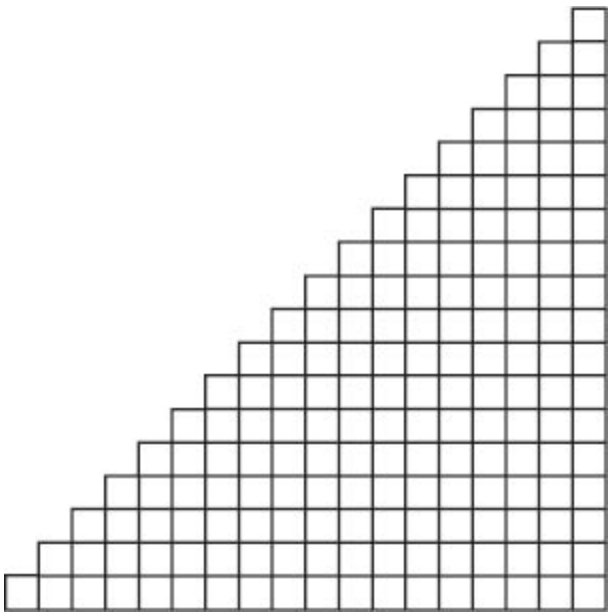
Prima di immaginare la somma, partiamo da un singolo numero, per esempio il 3. Immaginare il numero 3 nella realtà è abbastanza semplice: basta immaginare 3 oggetti, come quando eravamo alla scuola primaria e ci chiedevano di considerare *mentalmente* 3 arance. Questo rapporto infantile con i numeri, questa richiesta di *interazione carnale* con ciò che è astratto, è lo stato d'animo giusto per fare matematica. Quando si vedono 3 arance invece del numero 3, si inizia a uscire dalla trappola linguistica. Si smette di confondere la scrittura di un numero con il suo valore.

Un numero intero è sempre importante.

Tuttavia, per immaginare la somma dei numeri interi da 1 a 100, vi sconsiglio di usare le arance: vi ritrovereste con molte arance e non sarebbe facile disporle.

Personalmente, trovo molto piú facile immaginare la scena con i cubi. Riesco a visualizzare ogni numero come una pila di cubi e a disporre queste pile una accanto all'altra, da 1 a 100.

È difficile disegnare esattamente ciò che mi appare. La mia immagine mentale non è del tutto chiara e la pila sarebbe troppo grande per essere rappresentata in una pagina. Dunque, devo andare per approssimazione. Vista di fronte sarebbe cosí:



Questo disegno è sbagliato, ma non importa. Ciò che conta è essere consapevoli del modo in cui è sbagliato. In questo caso, mancano dei cubi. Invece di avere diciotto cubi di lato e diciotto cubi in altezza come nel mio

disegno, la pila dovrebbe avere cento cubi di lato e cento cubi in altezza. È bene tenerlo a mente. Nonostante il difetto, questo disegno mi sembra il modo giusto per condividere la mia immagine mentale (se disegnassi tutti i cubi, non si vedrebbe piú niente).

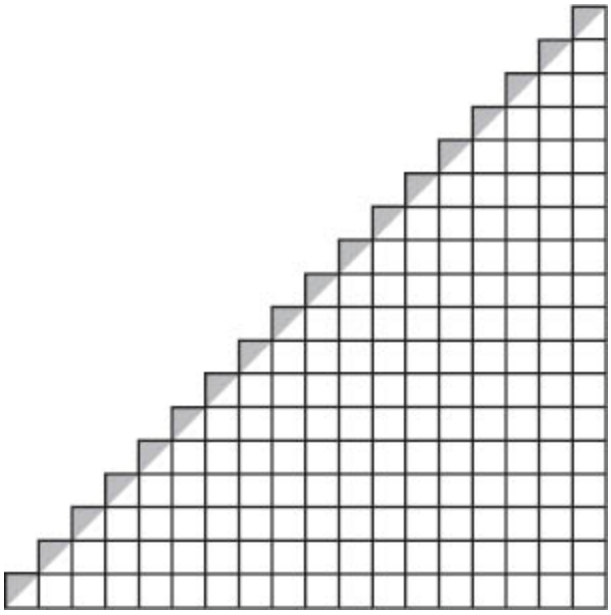
Ecco fatto! È stato facile, vero?

I matematici tendono a considerare conclusa una dimostrazione non appena sentono che si è formata l'immagine giusta, cosí come i giocatori di scacchi interrompono le partite senza andare fino allo scacco matto, perché riconoscono che una certa posizione dei pezzi è vincente.

Ma prendiamoci comunque il tempo per finire la partita. Se riuscite a visualizzare questa immagine, è difficile non vedere un triangolo. Il numero che stiamo cercando, il numero totale di cubi, è l'area del triangolo. Esiste una formula molto semplice, a livello di scuola primaria, per calcolare quest'area. Ecco due modi per finire il gioco, a seconda che si conosca o meno la formula.

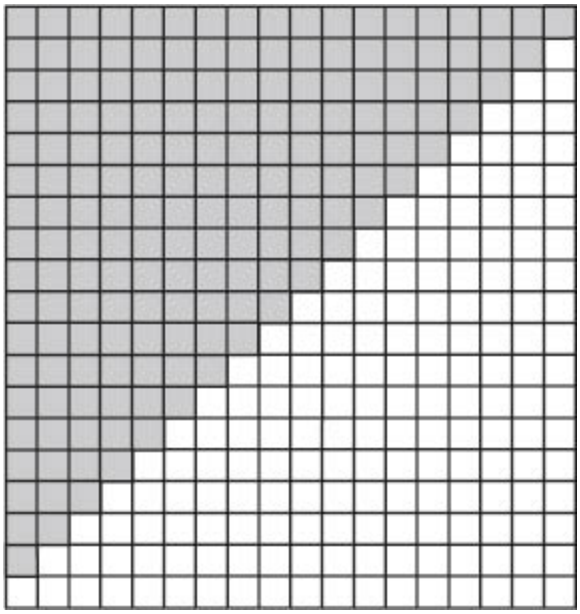
1. *Conoscete la formula*. Per calcolare l'area di un triangolo, basta moltiplicare la base per l'altezza e dividere per 2. In questo caso, la base è 100, l'altezza è 100. Moltiplicandoli si ottiene 10 000, dividendo per 2 si ottiene 5 000.

È quasi giusto. Abbiamo appena riprodotto lo stesso errore commesso da Thurston quando aveva cinque anni. È un buon segno, stiamo pensando nel modo giusto.



L’errore consiste nell’aver dimenticato i mezzi cubi che si trovano sopra la diagonale e che non vengono conteggiati nell’area del triangolo. Abbiamo dimenticato 100 mezzi cubi, quindi dobbiamo aggiungerne 50: sono 5 050.

2. *Non conoscete la formula*. Bene, la reinventerete. Se osservate attentamente, vi renderete conto che un triangolo è un mezzo rettangolo. Se si prende la pila triangolare originale (in bianco) e una copia di questa pila triangolare (in grigio), si gira la copia e la si mette a testa in giú sulla pila iniziale, si ottiene qualcosa di simile a questo:



Si ottiene cosí un rettangolo con una larghezza di 100 e un’altezza di 101, quindi composto da 100 × 101 = 10 100 cubi. Ci sono quindi 5 050 cubi in ogni triangolo. Il famoso «trucco» di prendere la doppia somma e disporla in modo strano era proprio questo, un modo per scomporre l’area del rettangolo nei due triangoli:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$
$$+ 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Il kung fu probabilistico

La palla e la mazza, la somma dei numeri interi da 1 a 100: mi piacciono questi problemi per bambini, perché si possono descrivere con parole

semplici e ci permettono di intravedere il fossato che separa la matematica ufficiale, intrappolata nel linguaggio, e la matematica segreta, quella che si fa nella propria testa.

In entrambi i casi, basta un semplice sforzo di visualizzazione per rendere ovvio un calcolo che il 99% delle persone non trova affatto ovvio.

Non è sempre cosí semplice. La visualizzazione non è sempre sufficiente e la sfida non è quella di fare a meno del ragionamento meccanico deduttivo. Per capire la matematica, bisogna allenarsi a combinare immaginazione e linguaggio, intuizione e logica, visione da vicino e da lontano, sogno a occhi aperti e calcolo.

Non voglio nemmeno dare l'impressione che i problemi matematici siano tutti problemi numerici e che tutta l'intuizione sia di natura geometrica.

Gli oggetti matematici sono di natura molto diversa e la loro comprensione intuitiva accende immaginari molto differenti. La tabella seguente elenca alcune delle principali aree della matematica. È incompleta e semplificata, ma permette di farsi un'idea iniziale:

Aree	**Oggetti studiati**
Aritmetica	Numeri interi
Geometria	Spazi e forme
Topologia	Spazi morbidi e forme di gomma
Teoria dei gruppi	Simmetria e trasformazioni
Algebra	Strutture astratte
Analisi	Limiti, «cose infinitamente piccole»
Teoria delle probabilità	Caso, fenomeni aleatori
Logica	Dimostrazioni (viste come oggetti matematici)
Teoria degli algoritmi	Calcoli (visti come oggetti matematici)
Dinamica	Evoluzione dei sistemi

Calcolo combinatorio	Enumerazione degli oggetti
…	…

Le principali aree della matematica

Ciascuna di queste aree ha un suo vocabolario e un tipo specifico di intuizioni. È come considerare i diversi modi di usare il nostro corpo, le diverse aree del nostro cervello, i diversi modi di concentrare la nostra attenzione. Possono dare l'impressione di parlare di cose differenti, ma in realtà stanno solo fornendo prospettive diverse sulla stessa realtà, la realtà matematica.

Quando se ne fa esperienza, a volte è sorprendente vedere come tutte queste aree siano una cosa sola. Tuttavia, le scoperte matematiche sono molto spesso ponti gettati tra due intuizioni di natura diversa.

A un livello molto elementare, questo è ciò che abbiamo appena fatto: una formula di geometria (che dà l'area di un triangolo o di un rettangolo) ci ha permesso di risolvere un problema aritmetico (la somma dei numeri interi da 1 a 100).

Concludiamo questo capitolo con un altro esempio ancora piú lampante.

Se vi è difficile visualizzare a grandezza naturale, proprio davanti ai vostri occhi, i numeri interi da 1 a 100, c'è un modo piú semplice. Invece di affannarsi a prendere tutti i numeri da 1 a 100, prendetene solo uno e prendetelo a caso. Quando si estrae un numero compreso tra 1 e 100, quanto vale *in media*?

Se vi sembra un concetto astratto, ecco un modo concreto di immaginarlo. State partecipando a un gioco a premi. In una borsa ci sono 100 assegni: un assegno da 1 dollaro, un assegno da 2 dollari, un assegno da 3 dollari e cosí via, fino a 100 dollari. È possibile scegliere un solo assegno, alla cieca. In media, quanto vi aspettate di vincere?

Riformulo la domanda: *quando si prende un numero a caso tra 1 e 100, quanto vale in media*?

La maggior parte delle persone risponde «50» senza pensarci. Tutti pensano che sia ovvio. Ma se la media dei numeri interi da 1 a 100 è 50, allora la somma vale 5 000: la somma di 100 numeri è 100 volte la loro media. Anche questo è ovvio per la maggior parte delle persone.

Quindi, cosa impedisce alle persone di rispondere con disinvoltura che la somma dei numeri interi da 1 a 100 è 5 000?

(Se il vostro intuito vi dice che la media è 50 si sbaglia. Non vi offendete, questo è esattamente lo stesso errore di Thurston. La media è in realtà 50.5. A questo punto, un errore dell'1% non dovrebbe piú rovinarvi la festa. È la media dei 101 numeri interi da 0 a 100 che vale 50.)

Se non capite cosa sta succedendo, se vi sembra assurdo che la difficoltà del problema sia improvvisamente svanita, è perché sottovalutate il potere del pensiero probabilistico. Assemblare mentalmente 5 050 cubi è un lavoro da traslocatore che richiede un certo carico cognitivo. Al contrario, il punto di vista probabilistico è una forma di kung fu che concentra l'attenzione su un singolo numero e lascia che i processi inconsci facciano tutto il lavoro, eliminando il carico cognitivo.

Sapevate già come calcolare la somma di numeri interi da 1 a 100 ma non ne avevate idea.

La nozione di *media* è un'invenzione puramente umana, un concetto matematico astratto che vi è stato insegnato e che avete assimilato profondamente, proprio come la scrittura decimale. Avete imparato a «vedere» le medie, cioè a calcolarle senza esserne coscienti e senza dover eseguire calcoli. Se volete confermare la vostra intuizione e trasformarla in un ragionamento rigoroso, se volete capire perché la media è 50.5 e non 50, dovete ascoltare voi stessi, i vostri processi inconsci e i loro meccanismi.

Questo lavoro introspettivo è il cuore della sfida matematica. Si tratta di decostruire le immagini mentali che utilizzate senza rendervene conto e individuare i punti in cui possono essere migliorabili. È questo lavoro che vi permette di irrobustire l'intuizione giorno dopo giorno.

I matematici manipolano astrazioni nel momento in cui si dimenticano che sono astrazioni, e preferiscono chiamarle *oggetti*. Amano dire che questi oggetti *esistono*. Con questo non si vuole necessariamente prendere posizione nella vecchia disputa metafisica che, da Platone in poi, discute sulla realtà delle astrazioni. Si vuole semplicemente dire che è cosí che si fa matematica: creando un legame di familiarità con questi oggetti, concedendosi di immaginarli e manipolarli mentalmente proprio come si maneggiano le banane.

Per entrare in intimità con un oggetto matematico, bisogna osservarlo a lungo, con intensità e rilassatezza, con curiosità e apertura mentale. Bisogna prendersi il tempo per giocarci e creare una relazione *al di fuori del linguaggio*.

Quando Einstein diceva di essere «appassionatamente curioso», quando Grothendieck diceva di essere «solo in ascolto delle cose, intensamente assorbito da un gioco da bambini», è di questo che stavano parlando.

13. *Passare per stupidi*

Quando ho iniziato gli studi, pensavo che la creatività matematica fosse riservata a persone piú intelligenti di me. Pensavo che l'intelligenza matematica fosse innata e che tutti ne avessero una determinata quantità. Io avevo avuto la fortuna di riceverne piú della media. Le persone geniali ne avevano ricevuto incredibilmente piú di me.

Non avevo ancora capito che l'intelligenza matematica è qualcosa che si costruisce da soli. È il prodotto naturale di un'attività fisica che tutti sono liberi di praticare: l'immaginazione matematica.

La matematica è la scienza dell'immaginazione. Tra coloro che si permettono di immaginare, osservare e manipolare oggetti matematici e coloro che non lo fanno, si crea una distanza. Con il passare degli anni, questa distanza diventa enorme e imbarazzante, proprio come quella tra i bambini che hanno stanze piene di giocattoli e quelli che non sanno che i giocattoli esistono.

Contrariamente a quanto si crede, la logica non è nemica dell'immaginazione. È addirittura il suo grande alleato. Il vero nemico dell'immaginazione, quello che blocca la comprensione e ci fa sentire stupidi, è sempre la paura. La paura è il nostro vero limite. Ci riguarda tutti, a tutti i livelli, dai peggiori ai migliori, dai principianti agli accademici di fama. Tutti abbiamo i nostri punti deboli, quelle parole che al solo evocarle ci terrorizzano perché le associamo alla nostra profonda insicurezza, alla nostra convinzione di non essere all'altezza. Rimaniamo impietriti di fronte al cartello «solo geni» che ci sbarra l'accesso, dimenticando che l'abbiamo piantato noi stessi il giorno in cui ci siamo detti che era troppo difficile per noi.

La cosa piú crudele della paura della matematica è che, per quanto siamo consapevoli che è solo una questione di testa, non cambia nulla. È

come con le vertigini: si sa che sono solo nella mente, ma le abbiamo comunque.

Le conversazioni mal riuscite

Nel progredire della mia conoscenza matematica, ho sperimentato tre grandi momenti di apertura, di sblocco; tre grandi periodi di liberazione in cui, in seguito a un cambiamento della postura psichica, ho sentito la paura retrocedere.

Ho raccontato i primi due di questi episodi nei capitoli 9 e 10. Prestando attenzione alla dissonanza tra la mia intuizione e la logica, ho imparato a liberarmi dalla paura di non riuscire a fare bene al primo tentativo. Mi sono permesso di dare libero spazio all'immaginazione, anche quando non capivo. Poi, scommettendo su una plasticità mentale infinita, ho scoperto che anch'io potevo diventare creativo: bastava osservare il mondo con innocenza e sincerità e prendersi il tempo per immergervisi.

Il terzo e piú inaspettato momento di sblocco è avvenuto piú tardi, quando avevo trent'anni.

Fino ad allora, nonostante un inizio di carriera onorevole e alcuni successi, rimanevo convinto di non essere un vero matematico. Attribuivo i miei successi alla fortuna. La mia carriera era una farsa, mi dicevo, e alla fine sarei stato scoperto. Quando insegnavo a Yale, ho avuto letteralmente degli incubi al riguardo.

Le nostre paure piú profonde sono spesso paure sociali. Quando si tratta di matematica, abbiamo paura di essere piú stupidi degli altri e temiamo che gli altri se ne accorgano.

Ho visto questa stessa paura negli occhi della grande maggioranza dei giovani matematici. È un fenomeno abbastanza naturale. Nel capitolo 4 ho parlato di quella sorta di illusione ottica che ci fa sottovalutare le difficoltà della matematica che comprendiamo meglio semplicemente perché per noi è evidente.

C'è un secondo fattore che riguarda specificamente i giovani universitari. Di solito, un accademico è qualcuno che sa. Quando si diventa matematici di professione, la propria identità sociale diventa quella di qualcuno che sa. Solo che non funziona affatto cosí e nessuno ve lo dice.

Questo equivoco può scatenare un forte sentimento di insicurezza. Conosco persone che proprio per questo si sono definitivamente bloccate.

La matematica non è una conoscenza, ma una pratica. Un matematico capisce gli oggetti su cui lavora meglio di chiunque altro perché gli sono familiari, ma la sua intuizione matematica non diventa mai onnipotente. Gli oggetti con cui non ha familiarità pongono sempre delle difficoltà. Si può essere un atleta eccezionale, un campione olimpico di giavellotto, al top della forma, ma questo non impedirà di essere battuto a tennis da un buon giocatore junior.

Nella ricerca matematica non ci sono posizioni di autorità. Questo crea situazioni inquietanti, emotivamente disturbanti, perché vanno contro le aspettative sociali.

Ecco un esempio. Mettiamo che siate un giovane e brillante ricercatore, avete appena ottenuto una posizione di prestigio e siete ospiti di una conferenza internazionale. A cena, vi ritrovate seduti accanto a una giovane dottoranda che vi racconta il tema della sua tesi. Non capite quello che vi sta dicendo. Le fate una domanda, ma non capite la risposta. Siccome siete tenaci, osate dirle con franchezza che non avete capito. Lei risponde che non è un problema, che ve lo spiegherà di nuovo in modo piú semplice e che capirete subito. Ma ancora non capite nulla di quello che vi sta dicendo.

Sapete che sarebbe necessario ricominciare dall'inizio, da quelle basi che avreste dovuto conoscere da anni e che invece vi mancano. State raggiungendo i limiti di ciò che è socialmente accettabile. È in gioco la vostra credibilità. Se lasciate intendere che non riuscite a star dietro al discorso, farete la figura dello stupido. La norma sociale è quindi non insistere.

Questa è l'archetipo di tutte le conversazioni matematiche mal riuscite, quelle che non ci insegnano nulla e rafforzano la nostra certezza di essere degli incompetenti della peggior specie.

Non importa quanto siate ferrati in matematica, avete capito di cosa sto parlando. La stragrande maggioranza delle conversazioni matematiche si conclude con una simile sensazione di disagio. Falliscono per questo semplice motivo: non avete il coraggio di dire che non possedete gli strumenti per seguire il discorso degli altri, vi vergognate e pensate di essere ridicoli. Quest'idea vi annebbia la mente e finirete per non ascoltare nemmeno piú. L'unica cosa a cui riuscite a pensare è la vostra pochezza.

Tutto questo vi impedisce di far correre l'immaginazione e di imparare. Si esce da queste conversazioni umiliati.

A trentadue anni ho imparato una tecnica di ingegneria sociale che mi ha permesso cambiare la dinamica di queste conversazioni.

La tecnica mi è stata insegnata direttamente da Jean-Pierre Serre, di cui abbiamo parlato nel capitolo 7, l'uomo a cui Grothendieck scrisse del suo «noioso saggio».

La lezione è durata cinque secondi e sta tutta in una frase. È stata la lezione di psicologia matematica piú efficace che abbia mai ricevuto in vita mia. Ci ho ripensato per mesi prima di apprezzarne appieno l'importanza. Grazie a questa tecnica, non ho mai piú lasciato una conversazione matematica con un sentimento di umiliazione.

Sospetto che ci sia un nesso causale: tra i trentadue e i trentacinque anni ho vissuto una straordinaria accelerazione nella mia comprensione della matematica. Per la prima volta mi sono sentito del tutto legittimato e a mio agio. La mia ricerca ha fatto progressi spettacolari. Sono profondamente orgoglioso dei teoremi che ho dimostrato in quel periodo.

L'arte di raccontare la matematica

Naturalmente vi metterò a parte della tecnica appresa da Serre, ma devo innanzitutto spiegarne il contesto.

Prima che dei nuovi risultati matematici vengano scritti e pubblicati, di solito sono presentati a voce in occasione di seminari e conferenze.

Mi è sempre piaciuto fare conferenze di matematica. Il *format* incute timore, soprattutto quando si è alla lavagna: di solito dura un'ora, siete da soli con il gesso in mano, davanti a un pubblico di specialisti che vi guardano impassibili e vi interrompono liberamente con le loro domande. Non c'è molto spazio per i bluff. È proprio questo l'aspetto piú esaltante.

Ricordo molto bene la mia prima presentazione da ricercatore: era il 1997, a Cambridge, presso il Newton Institute. Ero un dottorando ed ero assolutamente terrorizzato. Per combattere la mia insicurezza, ho scelto di impostare la presentazione al livello piú elementare possibile, il che ha richiesto una grande preparazione. Ho cercato un modo per raccontare la storia con le immagini mentali piú semplici e le sequenze piú naturali.

Stavo cercando di fare in qualche modo una presentazione che riducesse al minimo l'energia mentale, la mia e quella del pubblico. La metafora giusta è quella dell'arrampicata in falesia: per scalare una falesia, bisogna trovare una via e una sequenza di gesti che quasi non richiedono sforzo. Ci si riesce solo se ci si sente a proprio agio. Se la via diventa troppo dura, ci si può fare molto, molto male.

Quella presentazione è stata una vera e propria rivelazione. Mi sono reso conto che spiegando agli altri potevo capire esattamente i risultati ai quali ero arrivato. È un fenomeno ben noto ai matematici, che l'hanno fatto diventare un proverbio: l'unica utilità delle lezioni di matematica è che permettono al docente di capire cosa ha pensato.

Il modo migliore per capire la mia matematica è immaginare di doverla spiegare a dei principianti. Facendo un po' la parte dello stupido tra me e me, finisco per trovare il modo di presentare i risultati come se fossero del tutto evidenti.

Questo approccio minimalista è diventato il mio stile di presentazione, in contrasto con lo stile ermetico e la spavalderia tecnica dietro la quale molti giovani matematici amano nascondersi. All'inizio temevo che l'ingenuità delle mie presentazioni mi avrebbe giocato a sfavore. Il rischio era di non essere preso sul serio. È successo il contrario. Piú le mie presentazioni erano semplici, piú la gente pensava che fossi intelligente.

Un giorno dovevo tenere una conferenza al seminario di Chevalley sulla teoria dei gruppi che si teneva a Parigi.

Non avevo molti nuovi risultati da presentare, ma è stata un'opportunità per rendere la mia presentazione ancora piú semplice del solito. Quando sono arrivato in aula erano presenti circa 15 ricercatori; c'erano anche alcuni studenti seduti in fondo. Pochi minuti prima dell'inizio della presentazione, Serre è entrato e si è seduto in seconda fila.

Ero molto felice di averlo tra il pubblico, ma l'ho subito avvertito che avrebbe potuto trovare la presentazione poco interessante, perché si trattava di un intervento di divulgazione dove avrei spiegato alcune cose davvero basilari.

Quello che non gli ho detto, ovviamente, era che la sua presenza mi intimoriva. Ma non avevo intenzione di alzare il livello del discorso solo per lui. Mi sono limitato ad assicurarmi che non si togliesse gli occhiali, perché avrebbe significato che si annoiava e dunque avrebbe smesso di ascoltarmi. Non c'è stato problema, li ha tenuti fino alla fine.

Ho fatto il mio discorso come se non fosse stato presente, rivolgendomi a tutto il pubblico, e in particolare alle persone sedute in fondo alla sala, alcuni dottorandi e due studenti ai primi anni; vedevo che ascoltavano, sembrava che capissero e questo mi ha fatto piacere.

È stata una presentazione normale, piuttosto riuscita, non molto approfondita ma ben preparata, chiara e comprensibile. Alla fine del seminario, Serre mi si è avvicinato e mi ha detto, soppesando le parole: «Dovrai spiegarmelo di nuovo, perché non ho capito niente».

Sembrare uno stupido

Questa storia è vera e mi ha lasciato decisamente molto perplesso.

Chiaramente, Serre non stava usando il verbo «capire» nel senso in cui lo usa la maggior parte delle persone. I concetti e i ragionamenti della mia presentazione non potevano certo metterlo in difficoltà. Sicuramente intendeva dire che aveva capito quello che avevo spiegato, ma che non capiva *perché* quello che avevo spiegato dovesse essere vero.

È un po' come con la somma dei numeri interi da 1 a 100, dove ci sono due livelli di comprensione. Il primo livello consiste nel seguire il ragionamento passo dopo passo e *riconoscerne* la correttezza, il che non significa capirlo. Il secondo livello è la vera comprensione. Bisogna *vedere* da dove viene il ragionamento e perché è logico.

Ripensando all'osservazione di Serre, mi sono reso conto che nella mia presentazione c'erano troppi «miracoli», troppe scelte arbitrarie, troppe cose che funzionavano senza che sapessi bene perché. Serre aveva ragione, era incomprensibile. Mi ha aiutato a inquadrare alcune grosse lacune nella mia comprensione degli oggetti e delle situazioni su cui stavo lavorando in quel periodo.

Negli anni successivi, la ricerca di spiegazioni per questi vari miracoli mi ha permesso di colmare alcune lacune e di ottenere i risultati piú importanti della mia carriera. (Ancora oggi, alcuni miracoli rimangono inspiegabili.)

Ma la cosa piú inquietante era quella sorta di brutalità, di ferocia con cui Serre aveva comunicato la sua incomprensione.

Ci voleva un coraggio incredibile per fare una cosa del genere: ascoltare in silenzio per tutta la conferenza, poi andare dall'oratore e dirgli in faccia,

con un sorriso, che non si era «capito niente». Io non avrei mai osato.

Perché l'ha fatto? All'inizio mi sono detto che doveva essere una delle cose che si possono fare quando si è Jean-Pierre Serre. Poi mi sono reso conto che poteva essere vero anche il contrario: e se questa tecnica lo avesse effettivamente aiutato a diventare Jean-Pierre Serre?

Per scoprirlo, ho deciso di provarla.

Qualche mese dopo, a una conferenza, mi sono ritrovato seduto a un tavolo accanto a un dottorando. Durante il dessert, ha iniziato a spiegarmi a cosa stava lavorando. Naturalmente, non capivo niente. Alla fine della cena, l'ho preso da parte e gli ho detto: «Spiegami, ma vai piano. Non capisco nulla della questione. Facciamo finta che abbia un grave danno cerebrale e grandi difficoltà a mantenere la concentrazione».

Si è messo a ridere ed è stato cosí gentile da spiegarmi lentamente e con calma, partendo dall'inizio, le basi del suo campo di ricerca, che avrei dovuto conoscere e che non ero mai riuscito a capire prima.

La sua spiegazione non aveva nulla a che vedere con quella che mi aveva dato a tavola. Non usava le stesse parole e non parlava delle stesse cose. Era come se avesse due modi completamente diversi di raccontare il tema della ricerca. C'era il *menu per i turisti*, la spiegazione ufficiale che serviva ogni volta che voleva sembrare serio, e c'era il *menu segreto*, il modo semplice e intuitivo col quale capiva le cose.

Poiché il mio status di ricercatore affermato era superiore al suo di studente, aveva voluto impressionarmi servendomi il menu per turisti. Giocando sulla mia incompetenza, gli avevo dato il permesso di parlarmi da pari a pari e di dirmi le cose come le capiva.

Un altro vantaggio della tecnica di Serre è che sdrammatizza in anticipo tutte le domande stupide che inevitabilmente si vogliono fare. Invece di farle col contagocce, e con l'impressione di perdere terreno e dignità a ogni minuto di conversazione, è molto piú pratico mettere i piedi nel piatto fin dall'inizio: sí, farete molte domande stupide, e farete le stesse domande stupide piú e piú volte.

Se si inizia una conversazione matematica, è per imparare qualcosa, non per farsi umiliare.

A volte bisogna passare metà del tempo, e a volte tutto il tempo, a ripassare le nozioni di base che non si sono capite. È sempre meglio che parlare di cose di cui non capite niente. Se il vostro interlocutore non vuole scendere al vostro livello, se si rifiuta di partire dal basso e di prendervi per

mano, non c'è bisogno di offendersi. Probabilmente vi siete imbattuti in un artista della truffa, un tizio che cerca di spiegarvi una matematica che lui stesso non capisce.

Il bello di questo approccio è che, partendo dal presupposto che siete un incompetente, farete colpo mostrando sicurezza in voi stessi.

Il rifiuto della paura

La tecnica di Serre è semplice ed efficace. A prima vista, è alla portata di tutti. Non c'è motivo per cui non possiate guardare le persone negli occhi e dir loro, con un grande sorriso, che non avete capito niente e che dovrebbero rispiegarvi tutto dall'inizio. Chiaramente, non è una questione di quoziente intellettivo.

Provare per credere.

Sembra facile, ma non lo è. Può essere difficile bluffare, fingere di capire. È ancora piú difficile smettere di bluffare del tutto, fare tutte le domande stupide che ci passano per la mente senza filtri o senza imbarazzo. La tecnica di Serre è la versione *sociale* di quella che nel capitolo 7 abbiamo chiamato *postura del bambino*. Richiede un grande controllo del corpo e delle emozioni, perché per istinto tendiamo a nascondere la nostra ignoranza.

Serre mi ha insegnato che è meglio andare dritti al punto, come un selvaggio, che camminare in punta di piedi. Se stiamo svelando ciò di cui ci vergogniamo e che vorremmo nascondere, tanto vale farne una commedia. L'umorismo è un'arma eccellente contro la paura. Ammettendo i vostri limiti intellettuali fino all'assurdo, potete creare una zona di libertà infantile in cui tutte le domande sono permesse.

Alla fine del capitolo 9, ho già citato l'intervista rilasciata da Pierre Deligne nel 2013, quando ha ricevuto il premio Abel. È stata l'occasione per condividere la sua visione dei problemi matematici e per ripercorrere i momenti decisivi della sua carriera. Ecco come Deligne racconta il suo primo incontro con Grothendieck, prima che diventasse il suo relatore di tesi.

Deligne, che all'epoca era un giovane studente, andò ad ascoltare un seminario tenuto da Grothendieck, che lo intimorí con la sua figura imponente e la testa rasata. Durante la conferenza, Grothendieck parlò a

lungo di una nozione matematica centrale nel suo lavoro, la «coomologia», riformulata in un contesto astratto di teoria delle categorie. Ma Deligne non riuscí a capire niente. Al termine della conferenza, si recò da Grothendieck e gli chiese di spiegargli cosa intendesse per «coomologia».

È un po' come ascoltare una conferenza di Einstein e alla fine andare da lui per chiedergli cosa intende per «relatività». A distanza di quasi mezzo secolo, Deligne continua ad ammirare la reazione di Grothendieck: «Altre persone avrebbero pensato che, poiché non sapevo di cosa si trattava, non valesse la pena parlarne con me, ma non è stata affatto la sua reazione. Mi ha spiegato tutto con molta pazienza»[1].

Quella pazienza e quella gentilezza hanno lasciato il segno in Deligne e gli hanno permesso di crescere: «Era estremamente gentile, potevi fargli domande che sembravano completamente stupide. Con lui non ero affatto timido, facevo domande completamente stupide e ho mantenuto questa abitudine fino ad oggi. Quando ascolto una conferenza, mi siedo nelle prime file e se c'è qualcosa che non capisco, chiedo, anche se si suppone che dovrei conoscere la risposta».

Non sono parole banali. Se Deligne si prende la briga di insistere, è perché sa quanto sia difficile. Ha visto tanti matematici fallire proprio su questo punto, perché non riuscivano a raggiungere il giusto livello di innocenza e di trasparenza. La difficoltà piú grande in matematica è superare la vergogna, l'istinto di fuga, il riflesso a nascondersi. È una questione di equilibrio e di impegno fisico.

In «On Proof and Progress in Mathematics», Thurston dice qualcosa di simile: «Sono felice quando riesco ad ammettere, almeno a me stesso, che il mio pensiero è confuso e quando cerco di superare il disagio che potrei provare nel rivelare la mia ignoranza o la mia confusione. Nel corso degli anni, questo mi ha aiutato a raggiungere la chiarezza su alcune questioni, ma rimango confuso su molte altre».

Serre, Deligne, Thurston, Grothendieck: questi matematici eccezionali insistono tutti sullo stesso punto. Non è una coincidenza. La lotta contro le nostre inibizioni e i nostri blocchi è l'essenza stessa del lavoro matematico.

È normale non capire. È normale avere paura. È normale dover lottare per arginare la paura. In fondo, è proprio questo il punto.

14. *Un’arte marziale*

All’inizio del 1649, Cartesio ricevette un invito dalla regina Cristina di Svezia tramite l’ambasciatore francese a Stoccolma. La regina voleva delle lezioni private.

Prima di accettare, Cartesio volle assicurarsi che si trattasse di una cosa seria. Mise in guardia l’ambasciatore: se fosse stato solo un capriccio, se la regina non avesse avuto la motivazione necessaria per imparare, lui non avrebbe fatto il viaggio.

L’anno prima, scrive, aveva perso tempo ad accettare un invito a Parigi: «La cosa che mi disgustava di piú era che nessuno di questi mostrava interesse a conoscere qualcosa di me, a parte la mia faccia». È il prezzo della fama. Pensava che lo chiamassero non per le sue idee, ma «come un elefante o una pantera, solo perché una cosa rara»[1].

Tre secoli prima di Einstein, Cartesio fu uno dei primi scienziati a raggiungere lo status di rockstar.

Alla fine, accettò l’invito della regina Cristina e si recò a Stoccolma, dove morí di polmonite all’età di 53 anni l’11 febbraio 1650. Quando il suo corpo fu riportato in Francia, rubarono il cranio, che circolò sul mercato nero per due secoli. I successivi proprietari vi incisero il proprio nome, come se il teschio fosse dotato di poteri magici di cui potersi appropriare. Il cranio è finito al Musée de l’Homme di Parigi, dove è esposto insieme a quello di un australopiteco.

«La cosa meglio distribuita nel mondo»

Ormai conosciamo a memoria questa ossessione per crani e cervelli. In fin dei conti, è la stessa storia che abbiamo raccontato fin dall’inizio.

Dodici anni prima, nel 1637, prima di diventare una celebrità, Cartesio aveva pubblicato un racconto autobiografico, il *Discorso sul metodo*, in cui ripercorreva il suo percorso intellettuale. Nel libro descriveva il suo metodo di lavoro e spiegava come era diventato il piú grande matematico dell'epoca.

Fin dalle prime pagine, il suo messaggio è di un'estrema chiarezza: non è particolarmente dotato, ha solo un modo diverso di vedere le cose.

«Per quanto mi riguarda non ho mai presunto che il mio ingegno fosse in nulla piú perfetto di quello di qualsiasi altra persona; anzi ho spesso desiderato di avere un pensiero cosí pronto, o l'immaginazione cosí netta e distinta, o la memoria cosí vasta o cosí presente come quella di altri».

Cartesio si stupisce del proprio valore intellettuale. È consapevole che la sua creatività potrebbe passare per magia. Ma sostiene che la sua origine è molto piú semplice e prosaica. È la diretta conseguenza di una scoperta che ha avuto la fortuna di fare in gioventú: «un metodo che – cosí almeno mi sembra – mi ha dato modo di accrescere per gradi la mia conoscenza, innalzandola a poco a poco al punto piú alto che la mediocrità del mio ingegno e la breve durata della vita potranno permetterle di raggiungere».

Questo metodo, come lo descrive lui stesso, è di una semplicità infantile. Cartesio mobilita solo una risorsa mentale, quel «buon senso» che abbiamo tutti. Tutti abbiamo il potenziale per diventare Cartesio. Per non lasciare spazio all'ambiguità, inizia il libro con una frase simile a uno slogan: «Il buon senso è la cosa meglio distribuita nel mondo».

Non abbiamo mai avuto l'opportunità di fare quella famosa discussione con Einstein. *Récoltes et semailles* è un testo ermetico, praticamente illeggibile. Il *Discorso sul metodo*, invece, è uno dei testi piú letti e discussi della storia del pensiero. Come mai, quattro secoli dopo, quasi nessuno sa dell'esistenza di un metodo per diventare molto bravi in matematica?

La nostra incapacità collettiva di leggere Cartesio è un fenomeno straordinario. Fingiamo di leggere, fingiamo di capire, fingiamo di trovarlo importante, ma in realtà ci rifiutiamo categoricamente di prenderlo sul serio. Nel profondo siamo convinti che ci stia prendendo in giro.

La storia di questo malinteso è la storia dell'incomprensione della matematica, ma non solo. La dimensione del malinteso è infatti enorme.

In effetti, Cartesio non si è fermato alla matematica. Dopo aver sviluppato questo metodo cosí particolare, dopo averlo praticato con ferrea

disciplina, dopo averlo convalidato attraverso grandi scoperte matematiche, lo volle utilizzare per ricostruire tutta la scienza e la filosofia.

La corrente di pensiero da lui fondata prende il nome di *razionalismo*. La nostra scienza e la nostra tecnologia ne sono dirette discendenti. Il razionalismo ha incontrato anche limiti e insidie che Cartesio non si aspettava e su cui torneremo. Questo non toglie nulla al suo successo. L'approccio razionalista sopravvive in tutti noi e, che ci piaccia o no, sappiamo tutti che la razionalità serve a qualcosa e che la matematica ha una potenza inaudita. Anche se ci è difficile spiegarne il motivo.

Quando ci rifiutiamo di prendere sul serio Cartesio, ci rifiutiamo di capire la razionalità stessa.

Il *Discorso sul metodo* non è un libro di teoria. Si tratta di una testimonianza personale, in cui Cartesio descrive una serie di tecniche mentali che ha sperimentato personalmente. Sostiene che queste tecniche gli hanno permesso di aumentare le sue facoltà cognitive, di acquisire fiducia e di fare grandi scoperte. A riprova di ciò, accompagna il racconto con tre testi scientifici, tra cui *La geometria*, un'opera matematica cosí rivoluzionaria da aver rimodellato il nostro linguaggio e la nostra immaginazione (per la prima volta nella storia, Cartesio usa la lettera x per designare un'incognita).

Il *Discorso sul metodo* è un libro di crescita personale il cui messaggio è molto semplice: abbiamo la capacità di costruire la nostra intelligenza e la fiducia in noi stessi.

La razionalità segreta

Quando sei un matematico, ti imbatti regolarmente in persone che si rivolgono a te dicendo «tu che sei razionale» o «tu che ami la logica», mentre l'espressione peggiore è, ovviamente, «tu che sei bravo in matematica».

È sempre un brutto segno, perché dietro c'è ogni volta un sottinteso del tipo «sei psicorigido», «non capisci le questioni umane» o «sei quello su cui sfogherò tutta la frustrazione che ho accumulato a scuola».

La razionalità ha una reputazione negativa quasi quanto la matematica. Come per la matematica, ce ne sono due versioni. Il lato visibile della razionalità è il discorso costruito e strutturato, la conoscenza consolidata, la

scienza e la tecnologia. La scuola ci insegna questa versione ufficiale con modesto successo.

Il lato nascosto della razionalità, la sua dimensione segreta e intima, rimane in gran parte sconosciuto, come se avessimo scelto deliberatamente di nasconderlo.

Nel capitolo 11 ho descritto la razionalità come un sinonimo del Sistema 2 (il pensiero meccanico che segue le regole della logica). Si tratta di una comoda scorciatoia perché molti la intendono cosí. Ma presenta problemi molto rilevanti. Opponendo la razionalità al Sistema 1 (il pensiero intuitivo, istintivo), di fatto la opponiamo alla comprensione umana. Non sorprende che questa versione della razionalità sia considerata arida e antipatica e che non piaccia a molte persone.

Questo non impedisce ad alcuni di cercare di vendercela come tale. Il piú delle volte costoro si mettono in una posizione di superiorità e di disprezzo. «Sii razionale» è il loro modo di dirci di «mangiare la minestra», «imparare la lezione», «reprimere i desideri», «rispettare l'autorità», «essere d'accordo con loro». Ci impongono di essere razionali, ma non sono in grado di spiegarci esattamente cosa significhi. Pretendono di essere Cartesio senza misurare l'enormità del loro controsenso. Non si pongono nemmeno la domanda sciocca e ovvia: con idee cosí limitate, Cartesio avrebbe mai potuto affascinare i suoi contemporanei «come un elefante o una pantera»?

Se ci si avvicina al *Discorso sul metodo* cercando un'apologia del Sistema 2, si cade proprio sulla questione. La grande innovazione di Cartesio consiste nel porre l'intuizione e la soggettività al centro del processo di conoscenza. Diffidava del sapere consolidato e di ciò che era scritto nei libri. Cartesio non dà credito ai discorsi ufficiali. Preferisce ricostruire tutto da solo, nella sua testa. Il suo metodo è stranamente simile a quello di Einstein, Thurston e Grothendieck. Si tratta naturalmente del Sistema 3, il lento dialogo tra intuizione e logica con l'obiettivo di far progredire l'intuizione.

Cartesio non nasconde che il suo metodo è quello dei matematici. Lo descrive senza mai parlare né di razionalità né di razionalismo. Queste parole non esistono ancora. Saranno inventate in seguito per definire il suo approccio. Se oggi Cartesio sarebbe o meno considerato «razionale», lascio deciderlo a voi.

Il grande libro del mondo

Cartesio nacque nel 1596 in una piccola città della Francia centrale, che da allora i suoi abitanti hanno scelto di ribattezzare Descartes. Il mondo in cui viveva era molto diverso dal nostro. Per capire il suo pensiero, bisogna iniziare a capire il suo mondo.

Il modo migliore per sbagliare l'approccio alla lettura del *Discorso sul metodo*, e cosí perdere completamente il suo messaggio, è vederlo come il lavoro di uno scolaretto, il primo della classe, che dà consigli su come andare bene a scuola, o di un accademico che spiega come condurre una ricerca in modo corretto e ricevere l'approvazione dei colleghi.

La vita di Cartesio non corrisponde allo stereotipo moderno di vita intellettuale. Non ebbe una carriera accademica e non visse mai della sua penna. Nonostante la sua brillante formazione scolastica, scelse di interrompere gli studi per emanciparsi da un'educazione che considerava truffaldina: «Per quello, infine, che riguarda le false scienze, già le stimavo cosí poco da non lasciarmi ingannare né dalle promesse di un alchimista, né dalle predizioni di un astrologo, né dalle imposture di un mago, né dagli artifici o dalle vanterie di coloro che proclamano di sapere piú di quello che effettivamente sanno».

Cartesio rifugge dalle «speculazioni che non producono effetti» e preferisce imparare direttamente «dal grande libro del mondo», per andare a vedere cosa succede effettivamente: «Trascorsi quanto rimaneva della mia giovinezza a viaggiare, a visitare corti ed eserciti, a frequentare gente di diversa indole e condizione, a raccogliere varie esperienze, a mettere me stesso alla prova nelle situazioni che la fortuna mi offriva».

«Procedere con sicurezza in questa vita»

Cartesio lo dice esplicitamente: la grande passione della sua vita fu la ricerca della «verità».

È facile riderne, o sorriderne, ostentare accondiscendenza dall'alto della nostra modernità, fingere che la nozione di verità sia diventata antiquata o superata. Eppure, è proprio qui che Cartesio ha piú da insegnarci.

Finché confondiamo la razionalità con la logica, finché riduciamo la questione della verità alla sua dimensione sociale e linguistica e finché la

vediamo solo come una questione di consenso o di autorità, perdiamo completamente l'approccio cartesiano.

Per Cartesio, la verità è una questione di vita o di morte. Egli incarna perfettamente questo aspetto singolare e potente della psicologia matematica: il suo rapporto con la verità è carnale.

«Tuttavia nutrivo pur sempre un estremo desiderio di imparare e di distinguere il vero dal falso, per vedere chiaro nelle mie azioni e procedere con sicurezza in questa vita».

A Cartesio non interessavano le verità di facciata, quelle che si ritengono vere perché cosí richiede la tradizione, perché lo dice il tale o il talaltro, o semplicemente perché sono plausibili. Ciò che gli interessava erano le verità concrete, quelle che non cambieranno domani, sulle quali possiamo appoggiarci per costruire noi stessi, diventare piú forti e sicuri, e fare le scelte giuste nella vita.

La verità di Cartesio è una forma di arte marziale. È un istinto che si sviluppa e si concretizza nell'azione. Tutto il resto, le dispute dei filosofi, le «opinioni» dei «dotti», sono per lui chiacchiere e non lo interessano.

Cartesio voleva «procedere con sicurezza in questa vita» e prese molto sul serio questo concetto. La sua passione per la scherma è indicativa di questo stato d'animo. Cerca la verità dove c'è una posta in gioco, dove si viene immediatamente «puniti» se si «giudica male».

Nonostante la sua «inclinazione» che gli fece sempre «odiare il mestiere di scrivere libri», a vent'anni scrisse un trattato di scherma in due parti. Questo manoscritto è andato perduto, ma ci è rimasto un riassunto che mostra il precoce interesse di Cartesio per le questioni legate al controllo del corpo.

Se fosse pubblicato oggi, *L'arte della scherma* potrebbe essere un vero best seller, nella sezione «sport da combattimento» o «crescita personale», sempre che il libro fosse all'altezza delle promesse: «come si può vincere infallibilmente» se si ipotizzano «due uomini di uguale taglia, uguale forza e uguali armi».

Attenzione, le moderne griglie di lettura possono farci perdere completamente il filo del discorso. Per Cartesio, la scherma non è un'attività di svago da praticare nei fine settimana, in un club, tra gente per bene. Non si tratta nemmeno della metafora di un torneo intellettuale. La scherma è letteralmente un'arte marziale, cioè un'arte di guerra, che deve essere presa alla lettera.

All’età di ventidue anni, fiducioso nel suo corpo e nel suo metodo, intraprese una carriera che si diceva non favorisse lo sviluppo delle qualità mentali: si fece reclutare come mercenario.

Il sogno razionale

All’epoca di Cartesio, un grande interrogativo tormentava le menti europee: era il Sole a girare intorno alla Terra o la Terra a girare intorno al Sole?

Ci vuole un vero sforzo di immaginazione per figurarsi cosa ciò volesse dire davvero. Nel mondo di oggi, non c’è dibattito scientifico che occupi la mente delle persone con la stessa intensità. Certamente c’è un vivace dibattito tra chi pensa che la Terra sia piatta e chi pensa che la Terra sia rotonda, ma da un punto di vista scientifico la questione è stata risolta da tempo.

Mettendo in discussione la visione tradizionale della Terra come centro dell’universo, Copernico scatenò molto piú di una disputa scientifica. Egli affrontò il mondo cristiano con una domanda esistenziale: la verità è necessariamente conforme a ciò che è scritto nei libri o noi, come esseri umani, abbiamo la capacità di scoprirla da soli?

Nella notte tra il 10 e l’11 novembre 1619[2], all’età di ventitré anni, mentre era di stanza in una guarnigione a Neubourg, in Germania, Cartesio fece tre sogni in successione. Il primo sogno è piuttosto complicato e

riguarda un melone che qualcuno vuole regalargli e che, secondo lui, rappresenta «l'incanto della solitudine».

Nel secondo sogno, si sente come se fosse stato colpito da un fulmine. Si sveglia di soprassalto e vede scintille intorno a sé, come se la stanza stesse andando a fuoco. Anche in questo caso dà un'interpretazione: è «lo Spirito della Verità» che è sceso su di lui per possederlo.

Il terzo sogno è un cosiddetto *sogno lucido*: nel bel mezzo del sogno, Cartesio si rende conto che sta sognando e inizia a interpretare il proprio sogno mentre lo sta facendo.

Sul tavolo è apparso un dizionario. Se ne compiace e pensa che gli potrà tornare utile. Ma ora un secondo libro attira la sua attenzione, una grande *Raccolta dei poeti*, che sta sfogliando quando uno sconosciuto appare e gli mostra un poema in versi. Cartesio riconosce l'inizio del poema «Il sí e il no dei pitagorici» del poeta latino Ausonio, che inizia a cercare nella raccolta.

Poco dopo, Cartesio si accorge che il dizionario è danneggiato. Poi l'uomo e i libri scompaiono. Senza svegliarsi, Cartesio interpreta il dizionario come simbolo della scienza e il libro di poesia come simbolo della filosofia e della saggezza. La sostanza del sogno è proprio questa: la scienza deve essere ricostruita con la tecnica dei poeti che, attraverso la «divina natura dell'entusiasmo» e la «forza dell'immaginazione» riescono a far emergere «i semi della saggezza (che si trovano nello spirito di tutti gli uomini, come nella selce le scintille) con maggior facilità e splendore di quel che non fa la ragione nei filosofi».

È cosí che Cartesio ha inventato la razionalità. Quando si sveglia, è convinto che lo Spirito della verità sia venuto ad «aprire i tesori di tutte le scienze», rivelandogli che la Verità non si trova nei libri ma nella nostra testa. Abbiamo la capacità di scoprirla da soli, con la forza del pensiero.

Per Cartesio, l'unico criterio veramente affidabile di verità è l'evidenza. Non la prima evidenza, quell'intuizione iniziale che spesso è falsa, ma l'evidenza costruita da un lavoro intenzionale e sistematico di chiarificazione, verbalizzazione ed esplicitazione, volto a rendere le cose perfettamente intelligibili fino a quando diventano trasparenti: «Sono vere tutte le cose che concepiamo chiaramente e distintamente».

La vera matematica

Questa rivelazione avrebbe guidato il resto della sua vita. L'anno successivo, nel 1620, Cartesio abbandonò la carriera militare per dedicarsi alla scienza.

Iniziò con l'aritmetica e la geometria, «la piú semplice e chiara di tutte le scienze», dove ottenne i primi risultati e acquistò notorietà.

Egli vedeva la matematica come il fondamento di tutta la conoscenza, non solo nel senso tecnico che ci è oggi familiare (dal XVII secolo, il formalismo matematico fa parte degli strumenti di base della scienza), ma anche e soprattutto in un senso intimo e primordiale, radicato nella parte piú profonda della psicologia umana.

Per Cartesio, l'esperienza della comprensione matematica è l'unica che ci permette di comprendere veramente cosa significa «capire». Ha un gusto intenso, un sapore unico e sconcertante che ha il potere di agire su di noi come un rivelatore. La matematica è un risveglio spirituale. Ci insegna a riconoscere la giusta sensazione fisica, quella che dovrebbe guidarci sulla via della conoscenza. Finché non abbiamo incontrato personalmente questa forma cristallina e traslucida di verità, è impossibile comprendere il significato delle parole «chiaro» e «distinto», è impossibile ascoltare ciò che Cartesio vuole dirci e, secondo lui, è impossibile per noi entrare in un vero processo di conoscenza.

Intorno al 1628 iniziò a scrivere le *Regole per la guida dell'intelligenza*[3], il primo tentativo di esporre il suo metodo. Questo testo, che Cartesio scelse di non pubblicare mai, anticipa il *Discorso sul metodo* che avrebbe scritto quasi dieci anni dopo.

Nel testo, presenta la matematica come un «involucro» che dobbiamo aprire per accedere a ciò che è nascosto al suo interno: «Non c'è nulla di piú vuoto che occuparsi di numeri e figure immaginarie, come se volessimo fermarci alla conoscenza di tali inezie».

«Quando ho iniziato a occuparmi di matematica, ho letto la maggior parte delle opere di coloro che l'hanno coltivata. […] Ma non ho trovato [nessun] autore che mi soddisfacesse completamente. […] Non mi sembrava che fosse stato detto alla mente con sufficiente chiarezza perché le cose erano come palesavano e con quali mezzi erano state scoperte».

I filosofi della Grecia antica hanno dato alla matematica un posto molto speciale. Ne hanno fatto il prerequisito di tutta la filosofia e la scienza. La tradizione vuole che all'ingresso dell'Accademia di Platone sia stata incisa questa frase: «Non lasciate entrare nessuno che non sia un geometra».

Per Cartesio, questo non poteva essere un riferimento alla matematica ufficiale, quella che ci insegnano a scuola e che sembra cosí «puerile e vana»: «Sospettavo che conoscessero una certa scienza matematica diversa da quella della nostra epoca».

Per lui, i sapienti dell'antichità dovevano necessariamente avere accesso alla «vera matematica». La sua ipotesi è che «con un espediente colpevole ne abbiano soppresso la conoscenza; come alcuni artigiani che nascondono il loro segreto, hanno forse temuto che la facilità e la semplicità del loro metodo, divulgandolo, ne diminuissero l'importanza, e hanno preferito farsi ammirare lasciandoci, come prodotto della loro arte, alcune sterili verità sottilmente dedotte, piuttosto che insegnarci quest'arte stessa, la cui conoscenza avrebbe fatto cessare ogni nostra ammirazione».

Ciò che soffochiamo in noi stessi

Regole per la guida dell'intelligenza è un testo visionario che anticipa i temi che abbiamo trattato fin dall'inizio di questo libro. Cartesio arriva a formulare una profonda verità che sembra incredibilmente moderna: in matematica, gli ostacoli principali sono i nostri blocchi psicologici.

Il suo approccio è profondamente meditativo. Il suo scopo è quello di ritrovare la strada verso la nostra lucidità originaria. L'incontro con la «vera matematica» dovrebbe permetterci di accedere ai «germi originari di verità che la natura ha deposto nell'intelligenza umana e che soffochiamo in noi stessi».

Egli osserva che la difficoltà sarà nel quadro emozionale, non in quello intellettuale. Nasce dal nostro bisogno sociale di far credere, agli altri come a noi stessi, di capire ciò che in realtà non comprendiamo. È un po' come il salto di Fosbury: per assumere la giusta postura, dobbiamo disattivare il riflesso di fuga che ci fa pensare di essere in pericolo. Dobbiamo liberarci da una falsa comprensione e dalla nostra tendenza a fingere.

L'istinto che porta a dissimulare è particolarmente forte tra gli intellettuali, quelli che considerano «indegno di un sapiente ammettere che ignora qualcosa». Nascondono le loro false credenze sotto complicate argomentazioni, «tanto da convincersene e da considerarle come cose vere».

La nostra insicurezza è tale che abbiamo perfino dimenticato che la vera comprensione è possibile. Poiché ci rifiutiamo di credere che possa davvero essere raggiunta con facilità, cerchiamo la conoscenza nella direzione sbagliata, sul versante difficile.

Cartesio sa quanto le sue raccomandazioni contraddicano i nostri istinti. Quindi insiste molto:

«Dobbiamo ridurre per gradi le proposizioni imbarazzanti e oscure a quelle piú semplici, e poi partire dall'intuizione di queste ultime per arrivare, per gli stessi gradi, alla conoscenza delle altre».

«È solo in questo punto che consiste la perfezione del metodo. […] Ma molti non pensano a ciò che insegnano, o lo ignorano completamente, o presumono di non averne bisogno».

«Sembrano come chi vuole raggiungere la cima di un alto edificio con un salto, trascurando i gradini che vi conducono o non rendendosi conto della loro esistenza».

«Se nella serie di domande ne sorge una che la nostra mente non può comprendere appieno, dobbiamo fermarci lí».

«Tutti mi saranno grati per la mia franchezza»

Quello che Cartesio non dice è che si trova di fronte a un problema molto serio. Un problema che è assolutamente centrale nella sua filosofia e che non sarà mai in grado di risolvere: per quanto abbia sperimentato questo metodo su sé stesso, per quanto sappia che funziona, non riesce a spiegarne il perché.

Si tratta di un problema che incontrano tutti i matematici e di cui abbiamo già parlato. È difficile raccontare i gesti invisibili che compiamo nella mente. È difficile renderli tangibili e concreti per gli altri. È difficile trovare una spiegazione razionale del perché funziona. Il vocabolario di cui disponiamo per condividere le nostre esperienze mentali è cosí povero che, ben presto, ci sembra di parlare a vanvera, di cadere nella mistificazione piú totale.

La storia dello «Spirito della Verità» che scende su Cartesio per possederlo, dei «germi originari di verità che la natura ha deposto nell'intelligenza umana», non sembra molto seria. Eppure, questa è l'unica spiegazione che è in grado di fornire. È all'origine del suo *dualismo*:

immagina una separazione tra il corpo e la mente. La nostra mente sarebbe di natura immateriale, creata da Dio a sua immagine e quindi capace di accedere alla Verità come per magia.

Si può pensare ciò che si vuole di questa convinzione, ma non è scontata. In ogni caso, non soddisfa gli standard di rigore che Cartesio si era prefissato: accettare come vero solo ciò che è cosí evidente da non poter essere messo in dubbio.

Col senno di poi, possiamo vedere la portata del problema. Una spiegazione basata sulla plasticità mentale era impossibile da formulare nel XVII secolo. All'epoca di Cartesio, la conoscenza del corpo umano era ancora molto primitiva. Lui stesso vedeva il cuore come una caldaia che serviva a far bollire il sangue. A quel tempo, la pratica medica consisteva ancora nel vestirsi con costumi da carnevale per eseguire clisteri e salassi.

Tra i grandi matematici della storia, Cartesio non era certo l'unico a dare una spiegazione soprannaturale alla sua creatività. In *La clef des songes*, un testo mistico che scrisse dopo *Récoltes et semailles*, Grothendieck racconta che Dio venne a sognare dentro di lui per rivelargli la verità.

Srinivasa Ramanujan, di cui riparleremo alla fine del libro, sosteneva che i suoi teoremi gli erano stati rivelati in sogno dalla divinità di famiglia, Namagiri Thayar.

Confesso che queste spiegazioni mi lasciano un po' scettico. Torneremo su questo punto negli ultimi capitoli.

È forse perché intuisce che avrà difficoltà a convincere le persone che Cartesio abbandona la stesura delle *Regole per la guida dell'intelligenza*.

Piuttosto che esporre direttamente il suo metodo, scelse di metterlo in pratica. Proseguí le sue ricerche in matematica, fisica e biologia. Continuò a viaggiare. Trascorse diversi anni ad Amsterdam, nel quartiere dei macellai, dove poteva procurarsi cadaveri di animali ed effettuare numerose dissezioni. L'anatomia era uno dei suoi principali interessi.

All'inizio del 1630 lavorò a un importante trattato scientifico in cui intendeva spiegare tutti i fenomeni naturali.

Tuttavia, accadde una cosa che mise in discussione tutti i suoi piani. Nel febbraio del 1633, Galileo fu condannato per eresia e posto agli arresti domiciliari per aver difeso le tesi di Copernico.

Cartesio, che era seriamente preoccupato per la sua sicurezza personale, interruppe le ricerche e abbandonò la pubblicazione del trattato. Questa

stessa preoccupazione per la sicurezza lo aveva già portato all'esilio nei Paesi Bassi, una nazione protestante dove era fuori dalla portata dell'Inquisizione.

Piuttosto che una pubblicazione completa, che sarebbe stata una condanna garantita, scelse di pubblicarne solo una parte. Dunque, selezionò dal trattato i capitoli che meno potevano metterlo nei guai.

Il *Discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e cercare la verità nelle scienze* è l'introduzione che Cartesio aggiunse alla raccolta che pubblicò nel 1637, in forma anonima. I tre mini trattati che seguono questa introduzione (*La geometria*, un trattato di matematica, *La diottrica*, un trattato di ottica, e *Le meteore*, in cui vengono spiegati fenomeni come il vento, i fulmini e gli arcobaleni) sono presentati come prove dell'efficacia del metodo.

A differenza delle *Regole per la guida dell'intelligenza*, scritte in tono molto perentorio, il *Discorso sul metodo* si apre in modo sorprendentemente modesto.

Cartesio sembra essersi reso conto che la sua storia è un po' troppo pesante e che il pubblico la troverà difficile da digerire. Lui stesso non sembra crederci del tutto. Ecco come presenta il problema nelle prime pagine del libro. Da un lato, afferma di essere perfettamente consapevole dell'importanza del suo lavoro scientifico. Su questo punto, non è imbarazzato da una falsa modestia. Dall'altro, a suo modo di vedere, non si sente particolarmente dotato.

E arriva alla conclusione che il suo successo può essere spiegato solo da questo famoso metodo in cui si è imbattuto per caso. Ma ammette anche che questo poteva sembrare un po' troppo bello per essere vero: «Può tuttavia darsi che io mi inganni e prenda per oro e diamanti quello che è soltanto un po' di rame e di vetro. So bene quanto noi uomini si sia soggetti a sbagliare in quello che ci tocca da vicino».

«Il mio scopo, dunque, non è di insegnare qui il metodo che ciascuno deve seguire per ben condurre la propria ragione, ma semplicemente di far vedere in che modo ho cercato di condurre la mia».

In breve, non è qui per darci lezioni. Come per *Récoltes et semailles*, il *Discorso sul metodo* è un racconto autobiografico, una testimonianza soggettiva di cui ognuno è libero di fare ciò che vuole: «Spero che esso sarà utile a certuni, senza essere di danno a nessuno, e che tutti mi saranno grati per la mia franchezza».

Il dubbio viscerale

Il dubbio di Cartesio è un po' come il clic di Ben Underwood: le persone pensano che siano cose talmente difficili da far funzionare che non ci provano nemmeno, oppure si arrendono prima che comincino a produrre un qualche risultato.

A parte la comunità dei ricercatori matematici, non credo di aver mai incontrato nessuno che abbia preso sul serio il dubbio.

Un enorme peccato! Un grande matematico si impegna a raccontare come ci sia riuscito nonostante quella che lui definisce un'intelligenza media. Scrive nero su bianco che la sua testimonianza non ha alcun valore teorico e che è solo un esempio «che si può imitare». A generazioni di studenti delle scuole superiori viene fatto il lavaggio del cervello per fargli credere che questa testimonianza sia un trattato di filosofia. E quasi nessuno si preoccupa di provarlo *davvero*.

Prima di concludere questo capitolo, prendiamoci il tempo per chiarire che cos'è il dubbio cartesiano e quali vantaggi personali possiamo trarne.

In fondo, il dubbio cartesiano è la migliore introduzione possibile a quella nozione fondamentale che finora abbiamo appena sfiorato: la nozione di *dimostrazione matematica*.

A scuola ci insegnano che il dubbio cartesiano è un *dubbio metodico*. Questo è un modo per dire che il metodo si basa sul dubbio. Ma questa espressione può generare confusione. È facile fraintenderla, immaginando che si debba dubitare in modo metodico. Cosa che è rigorosamente impossibile, per lo stesso motivo per cui è impossibile innamorarsi con metodo. Si può dubitare solo con l'istinto. Il dubbio cartesiano è viscerale.

Voler dubitare metodicamente significa confondere il Sistema 2, il pensiero meccanico, con il Sistema 3, il dialogo tra intuizione e logica.

Cartesio non è ostile al Sistema 2. Consiglia, ad esempio, di fare degli elenchi per non dimenticare nulla. Ma il dubbio in sé non appartiene al Sistema 2. Non si può dubitare a parole, si può solo dubitare in silenzio e nella propria testa. Il dubbio è un'attività intima. Se si fa solo finta di dubitare, se non si va fino in fondo, se non ci si espone a ragionamenti fumosi, è del tutto inutile.

Inventando il dubbio, Cartesio si pone contro il sapere ufficiale. Vive in un mondo in cui la verità è ancora confusa con l'autorità: la verità è la tradizione, ciò che è scritto nei libri. Le scienze sono ancora eredi

dell’approccio di Aristotele, vecchio di duemila anni. Consistono nel raccogliere e cercare di strutturare un’accozzaglia di cose reputate vere al 99% (o che qualcuno considerato autorevole ha detto essere vere al 99%, o all’80%, o al 51%, non lo sappiamo).

Per esempio, quando Aristotele spiega perché la Terra è rotonda, accumula una serie di argomenti eterocliti provenienti da altri libri. Piú argomenti ci sono, piú si suppone che siano convincenti. Finché non ci spiega che ci sono elefanti in Africa, elefanti in Asia; quindi, per forza di cose, si incontrano nell’altra parte del pianeta, dunque la Terra è rotonda.

Dubitare significa fiutare una linea di ragionamento e sentire che qualcosa non ha senso. Significa permettersi di dire: «Davvero?»

La posizione di Cartesio è molto semplice: dice che ciò che è probabile, o anche certo al 99.99% ma non al 100%, può essere interessante, ma dal punto di vista scientifico non ha valore, perché su cose del genere non si può costruire nulla.

Insegnare il dubbio cartesiano è difficile perché non è né una conoscenza né una modalità di argomentazione, e di conseguenza è impossibile da valutare. Nessuno può dubitare su un foglio di carta. Il dubbio è un’attività psicomotoria nascosta, un gesto invisibile.

Dubitare di qualcosa significa essere in grado di immaginare uno scenario, per quanto improbabile, in cui quella cosa potrebbe essere falsa.

Cartesio ci invita ad applicare il dubbio non solo a ciò che dicono gli altri, ma anche e soprattutto alle nostre certezze. Questo è il cuore del suo metodo ed è qui che è piú difficile seguirlo. Mettere in discussione le proprie certezze è come lanciarsi all’indietro con la testa in avanti: l’istinto ci dice che è pericoloso. Abbiamo paura di esporre le nostre vulnerabilità psichiche, di precipitare, di cadere in un pozzo senza fondo dove non ci fideremo mai piú di nulla. E non vediamo assolutamente cosa potremmo guadagnarci a muoverci in questo senso.

Finché non si fa matematica, si tende a credere che sia davvero un pozzo senza fondo. Il livello di certezza richiesto da Cartesio sembra impossibile da raggiungere.

La matematica fornisce esempi di verità nelle quali si può avere una fiducia assoluta. Non si tratta solo di verità superficiali, come 2 + 2 = 4, ma anche di verità profonde, davvero interessanti, e per niente evidenti a prima vista. Nel prossimo capitolo forniremo alcuni esempi eclatanti.

È attraverso uno spietato procedimento dubitativo, che ci costringe a chiarire e specificare ogni dettaglio finché tutto diventa trasparente, che alla fine riusciamo a *costruire* delle evidenze. Il dubbio è una tecnica di chiarificazione mentale. Serve a costruire e non a distruggere.

«Un atteggiamento di curiosità che esclude ogni timore»

Al di fuori della matematica, il livello di certezza richiesto da Cartesio è impossibile da raggiungere, per ragioni profonde che hanno a che fare con il funzionamento del nostro linguaggio e del nostro cervello, e che sono state comprese solo di recente (torneremo su questo punto).

Ciò non toglie nulla alla potenza e all'utilità del dubbio cartesiano. Il messaggio relativo alla crescita personale del *Discorso sul metodo* va ben oltre il campo matematico e la ricerca di verità eterne.

Per cogliere questo messaggio, è essenziale comprendere la personalità e le motivazioni di Cartesio, il quale rifiuta lo scetticismo di coloro che «dubitano solo per dubitare e tengono sempre a essere irrisoluti».

Il suo obiettivo, come abbiamo visto, è esattamente l'opposto: vuole «procedere con sicurezza in questa vita».

Il suo approccio al dubbio è intimamente legato al gusto per l'intuizione: la definisce come «un concetto della mente pura e attenta, tanto ovvio e distinto che attorno a ciò che pensiamo non rimanga assolutamente alcun dubbio».

Il dubbio corrisponde quindi alle zone d'ombra dell'intuizione. Per dubitare veramente di qualcosa, non basta dire che si dubita, bisogna trovare davvero credibile che questa cosa possa non essere vera. Per farlo, dovete creare un'immagine mentale che renda possibile il dubitare. Quando non è possibile farlo, non si dubita, ma si è certi, come si può essere certi che 2 + 2 = 4. Ma non appena riusciamo a immaginare uno scenario in cui la cosa potrebbe essere falsa, il dubbio mette immediatamente in moto il processo di riconfigurazione delle rappresentazioni mentali.

Poiché attiva l'immaginazione, la versione cartesiana del dubbio assomiglia alle tecniche descritte nei capitoli precedenti, solo che invece di riguardare i numeri o le forme geometriche, riguarda la nozione stessa di verità.

Il dubbio di Cartesio è una tecnica universale per riprogrammare la propria intuizione.

Non sorprende quindi di trovare negli scritti di Cartesio un consiglio molto simile a quello dato da Grothendieck e Thurston. Per esempio, ci invita a impegnarci totalmente a livello fisico per il nostro sviluppo cognitivo: «Dobbiamo usare tutte le risorse dell'intelligenza, dell'immaginazione, dei sensi, della memoria, per avere un'intuizione chiara».

Cartesio non ha mai parlato esplicitamente di plasticità mentale. Questa nozione sarà concettualizzata solo diversi secoli dopo la sua morte. Ma è evidentemente in ciò che descrive, quando dimostra i benefici del suo metodo con queste parole di sorprendente precisione: «Avvertivo inoltre che nell'applicarlo, la mia mente si abituava gradualmente a concepire piú nettamente e piú distintamente i suoi oggetti».

Cartesio scoprí che quando ci impegniamo in un'introspezione sincera, quando ascoltiamo le nostre dissonanze cognitive, quando cerchiamo di catturare le nostre immagini mentali piú evanescenti e di assegnargli delle parole, quando abbiamo il coraggio di affrontare le contraddizioni interne della nostra immaginazione, quando abbiamo la fermezza sufficiente per svincolarci dai nostri pregiudizi e guardare le cose per come sono, questo ha l'effetto di modificare le nostre rappresentazioni mentali, di renderle piú potenti, piú solide, piú coerenti e piú efficaci.

Ciò che Cartesio ha scoperto è una proprietà del corpo umano.

A questo proposito, colpisce in Cartesio l'onnipresenza di termini legati alla visione. Quando afferma che la verità è ciò che è «chiaro» e «distinto», si potrebbe quasi dire che sta dando una definizione neurologica. Il suo metodo ricorda quello di Thurston e di Ben Underwood: è un metodo per imparare a vedere.

La verità produce un fenomeno di comprensione profonda che abbaglia Cartesio, cosí come abbaglia tutti coloro che la incontrano. È un'esperienza da cui si esce trasformati e che, di per sé, giustifica tutti gli sforzi.

Il dubbio non è solo il segreto della creatività di Cartesio, ma anche il segreto del suo incredibile *aplomb*. Letto in questa prospettiva, il *Discorso sul metodo* è una lezione magistrale di fiducia in sé stessi. La sua versione della razionalità è concreta, intima, radicata nelle nostre aspirazioni piú profonde. È un processo che ci consolida e ci fa crescere. La frase che segue è di Grothendieck, ma potrebbe essere stata scritta da Cartesio:

«Questa sicurezza è una delle facce di una disposizione interiore, la cui altra faccia è l’apertura al dubbio: un atteggiamento di curiosità che esclude ogni timore quando ci si trova di fronte ai propri errori, e che permette di individuarli e di correggerli costantemente».

Arroganti che amano essere contraddetti, sbruffoni che sorridono quando gli viene dimostrato che hanno torto, dogmatici pronti a cambiare idea in un secondo: ho riscontrato questa peculiare postura psichica solo in matematici molto bravi.

15. *Zero paura*

Se i gesti mentali dei matematici fossero visibili, i laboratori di ricerca avrebbero la facciata di vetro. I passanti si fermerebbero a guardare, cosí come si fermano a guardare le persone che fanno kitesurf o arrampicata. Al liceo la matematica sarebbe piú popolare dello skateboard.

Con il venir meno della possibilità d'imitare i gesti altrui, abbiamo perso molto piú del nostro principale metodo di apprendimento. Abbiamo perso anche il nostro principale metodo per desiderare.

Quando eravate bambini, nessuno doveva farvi venire voglia di andare in bicicletta. Nessuno ha dovuto convincervi che vi sarebbe servito nella vita, o che avrebbe fatto bella figura sul vostro curriculum.

Queste cose non vi sono mai passate per la testa. Avete visto altri bambini che andavano in bicicletta, vi è piaciuto e avete voluto fare lo stesso.

I principi fisici che regolano il movimento delle biciclette sono noti fin dal 1687, quando Isaac Newton pubblicò il suo grande trattato di fisica, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, nel quale formulò le due grandi leggi della meccanica razionale: la gravitazione universale e il principio di inerzia. La bicicletta fu inventata solo due secoli dopo. Se ne aveste regalata una a Newton per il suo compleanno, si sarebbe rifiutato di montarci sopra. Molto probabilmente avrebbe trovato l'idea assurda e pericolosa. Sarebbe arrivato persino a dimostrarvi che è fisicamente impossibile stare in equilibrio su una bicicletta. Ma se gli aveste mostrato come farlo, ne sarebbe rimasto affascinato.

La vertigine e il potere

Se potessi mostrarla, la matematica che ho in testa incuriosirebbe molte persone. Ma dirlo non serve a niente. Non ho alcun modo per mostrarvela. Non posso condividerla in modo diretto.

Quando si tratta di accendere la curiosità di qualcuno verso qualcosa, mi muovo in modo differente. Piuttosto che raccontare quello che mi interessa personalmente, scelgo soggetti piú accessibili, cercando di ricreare il giusto percorso emotivo. Ciò che mi ha spinto a fare matematica, alla fine, appartiene a quest'ambito: quello dell'esperienza emotiva.

Ricordo molto bene come mi sono sentito la prima volta che ho visto delle persone fare kitesurf. Mi dicevo che quello che stavo vedendo non era possibile. E allo stesso tempo era chiaramente possibile. Sono rimasto a lungo a guardare.

Qualcosa di simile mi ha incuriosito quando ho incontrato la matematica. Sembrava troppo difficile, troppo astratta, troppo incomprensibile. Fare matematica non sembrava possibile. E allo stesso tempo, sembrava possibile.

La difficoltà della matematica, la vertigine e il terrore che ci ispira, è solo la prima parte dell'esperienza emotiva. La seconda parte è l'incredibile sensazione di potere e magia che deriva dalla comprensione profonda, quando finalmente si scopre che non solo era possibile, ma anche facile.

Era addirittura facile fin dall'inizio e non ce ne siamo accorti. Ogni esperienza di apprendimento matematico riproduce questa doppia esperienza di vertigine e potere. Se non vi piacciono le emozioni, la matematica non fa per voi.

L'infinito in diverse dimensioni

Un buon argomento di divulgazione matematica è quello che permette di sperimentare questa doppia sensazione senza dover ricorrere a strumenti tecnici specializzati.

L'ideale è essere in grado di usare il linguaggio e l'intuizione di un alunno della scuola primaria. Quando voglio parlare della vertigine e del potere della matematica, mi piace partire dalle scoperte di Georg Cantor (1845-1918)[1].

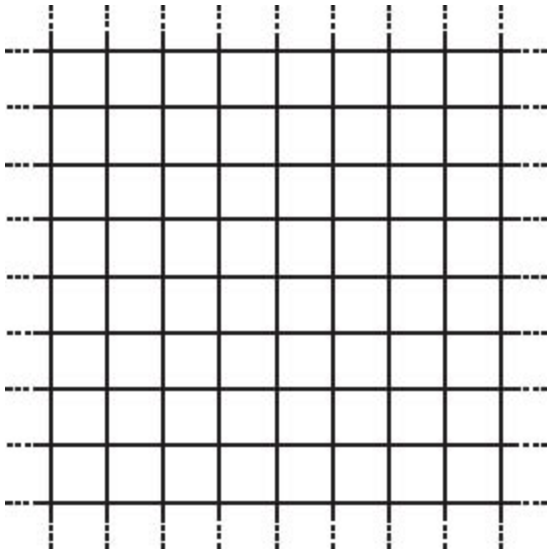
Il concetto di infinito è una di quelle nozioni che risalgono alla notte dei tempi e che, per migliaia e migliaia di anni, ha simboleggiato l'*impensabile*.

Si poteva parlare di infinito, ma solo in tono misterioso e magniloquente. Era un modo elegante di parlare di niente e di darsi un'aria profonda. Non abbiamo mai avuto l'opportunità di parlare dell'infinito in modo pragmatico e rilassato, come quando si parla del numero 5 o della linea retta che taglia un cerchio in due punti.

Dire cose precise e concrete sull'infinito era come andare sulla luna: l'esempio stesso dell'impossibile. Fino al giorno in cui Cantor si rese conto che era possibile. La cosa incredibile è che, a piú di un secolo da una scoperta cosí spettacolare, la maggior parte delle persone non ne è ancora a conoscenza.

Quando incontro qualcuno che non sa che esistono diverse dimensioni dell'infinito, è un po' come se incontrassi qualcuno che non sa che si può contare oltre il 5[2].

Prendiamo un piano infinito con una griglia. Sto disegnando solo un piccolo pezzo di questo piano, ma potete capire di cosa sto parlando: è un foglio di carta con una griglia che prosegue all'infinito su tutti i lati.



In questa griglia infinita ci sono infinite caselle bianche. Le persone di solito capiscono questo enunciato, lo trovano semplice e concreto.

Anche su una linea retta infinita c'è un numero infinito di punti. Pure questo è generalmente chiaro a tutti. Tutti capiscono il disegno:

Ci sono piú quadrati nella griglia che punti sulla retta? Sono lo stesso numero? O ci sono piú punti sulla retta che quadrati nella griglia?

Ho sentito persone sorridere di fronte a queste domande. Erano convinte che parlare di infinito fosse riservato ai mistici e ai teologi. Le due reazioni tipiche sono: «la domanda non ha senso» e «l'infinito non esiste».

Bisogna scegliere da che parte stare: se l'infinito non esiste, allora non esistono nemmeno le linee rette, altrimenti avrebbero solo un numero finito di punti. Le astrazioni matematiche non esistono né piú né meno delle altre astrazioni che manipoliamo. Il colore rosso esiste davvero? Gli elettroni esistono davvero? Esistono davvero la giustizia e la libertà? Nel capitolo 18 discuteremo le insormontabili difficoltà concettuali che derivano da una nozione cosí pragmatica e concreta come quella di *elefante*: in un certo senso, gli elefanti non esistono davvero. Questo non ci impedisce in alcun modo di parlare di elefanti, né di porre domande concrete sugli elefanti e dare risposte sensate a queste domande.

Cantor si rese conto che il linguaggio degli insiemi poteva essere utilizzato per dare un significato molto preciso alle domande sulla dimensione dell'infinito.

La nozione di insieme è molto antica. È stata usata fin dall'antichità, in modo informale, senza che nessuno trovasse nulla di sbagliato o si prendesse la briga di approfondire. Si poteva parlare dell'«insieme delle case nella mia strada», dell'«insieme delle mele che avete davanti» o dell'«insieme di tutti i numeri interi» e tutti capivano cosa significava. Il termine era percepito come una parola del linguaggio comune e non come un concetto matematico.

Partendo dall'idea intuitiva di cosa sia un insieme, Cantor inventò un vocabolario semplice e fortemente espressivo. Le sue definizioni non sono piú complicate della nostra teoria del tatto nel capitolo 8. Grazie a questo vocabolario, è possibile dare un significato molto preciso alle domande che abbiamo posto in precedenza e dare una risposta sorprendentemente chiara:

Teorema: ci sono piú punti sulla retta che quadrati nella griglia.

La cosa piú sorprendente è che tutto questo, dalle definizioni iniziali alla dimostrazione del teorema, si può spiegare in meno di un'ora a un alunno della scuola primaria. In altre parole, la soluzione a un problema ritenuto non solo *insolubile* ma addirittura *impensabile* era, fin dalla notte dei tempi, semplicemente lí, proprio sotto il naso, a meno di un'ora di distanza.

Non sto scherzando: l'ho spiegato davanti a un caffè ai figli di amici dai quali sono stato invitato a pranzo, e la cosa li ha molto interessati.

Molto brevemente e in modo incompleto, ecco i punti principali della dimostrazione. Definiamo l'infinità di caselle della griglia come una quantità *numerabile*: tutte le caselle possono essere numerate con numeri interi (per esempio iniziando con una casella arbitraria, che è numerata 0, poi numerando le caselle che la circondano da 1 a 8, e cosí via con le caselle successive, fino all'infinito). Cantor scoprí che, invece, la retta non è numerabile: l'infinità dei suoi punti è cosí grande che non possono essere numerati con numeri interi. Per dimostrarlo, utilizzò una procedura che oggi viene chiamata *argomento diagonale di Cantor*.

Piuttosto che cercare di spiegarvi i dettagli per iscritto, preferisco che troviate qualcuno che ve li spieghi a voce. Come abbiamo visto nel capitolo 6, la comunicazione diretta è straordinariamente piú efficace della lettura. Seguite i consigli del capitolo 13 e costringetevi a fare tutte le domande stupide che vi vengono in mente: vi garantisco che ne avrete parecchie.

Lo stesso Cantor fu molto sorpreso dall'efficacia del suo approccio. Pensava che gli fosse stato comunicato direttamente da Dio. A proposito di uno dei suoi risultati piú inaspettati (*in una retta ci sono tanti punti quanti ce ne sono in un piano*), confessò in una lettera a uno dei suoi amici: «Lo vedo, ma non ci credo!»

I risultati di Cantor erano cosí nuovi e sorprendenti che dovette affrontare l'incredulità dei suoi contemporanei. Un influente matematico lo definí un «ciarlatano», un «rinnegato» e un «corruttore di giovani». Uno dei suoi articoli fu rifiutato da una rivista scientifica con la motivazione che era arrivato «con cento anni di anticipo».

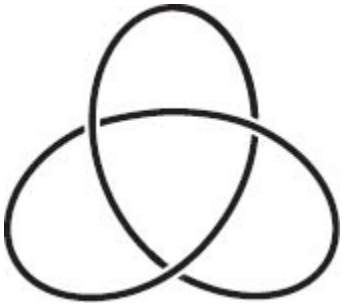
Alla fine della sua vita, tormentata dalle polemiche, Cantor cadde in una profonda depressione. Si sottopose diverse volte a cure psichiatriche all'interno di sanatori.

Alla fine, le sue idee hanno avuto la meglio. Dall'inizio del XX secolo, la nozione di insieme è diventata centrale per la matematica. Per una persona della mia generazione, immaginare di fare matematica senza insiemi è come immaginare di vivere senza elettricità.

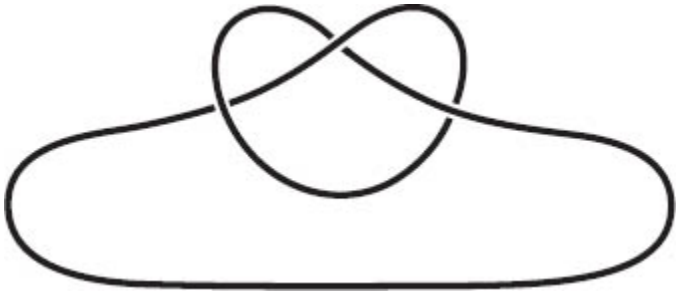
Afferrare i nodi

Quando voglio spiegare che cos'è una dimostrazione matematica, a cosa serve e il gusto particolare delle certezze che si possono costruire *con la forza del pensiero*, mi piace usare esempi tratti dalla teoria dei nodi[3].

In matematica, un *nodo* è un modo per unire le due estremità di una corda. Ad esempio, è possibile legare una corda su sé stessa in questo modo:



Questo nodo è chiamato *nodo a trifoglio*. La corda dovrebbe essere elastica e indistruttibile: finché la si torce senza slegarla, il nodo non cambia. Ad esempio, si può partire da una corda legata con un nodo a trifoglio e manipolarla per ottenere questo:



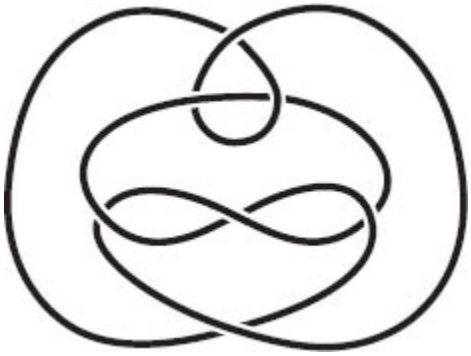
È sempre un nodo a trifoglio, ma è disegnato in modo differente. Se non capite subito come passare dal primo al secondo disegno, se vi viene un po' di mal di testa, non preoccupatevi. È normale. Se vi risulta piú semplice, potete utilizzare una stringa vera e propria.

Il modo piú semplice per legare una corda su sé stessa è il seguente:

Questo nodo è chiamato *nodo banale*. È, in un certo senso, lo zero dei nodi: è un nodo dove non c'è nessun nodo reale.

Naturalmente, il nodo banale può essere disegnato in modo differente, ad esempio in questo modo:

È evidente, visivamente parlando, che la corda non è realmente annodata e che si tratta ancora di un nodo banale. Ma ci sono altri modi di disegnare il nodo banale in cui non è piú evidente che si tratta di un nodo banale. Ad esempio, lo si può disegnare in questo modo:



Non è affatto facile sbrogliare questo disegno mentalmente, senza l'aiuto di un cordino o di carta e matita. Nonostante la mia ampia

esperienza nel trattare queste cose, mi ci è voluto un po' di tempo per capire come fare. Se riuscite a farlo in pochi minuti, senza alcun addestramento particolare, complimenti! Dopo che ci si è arrivati una prima volta, alle successive diventa piú facile.

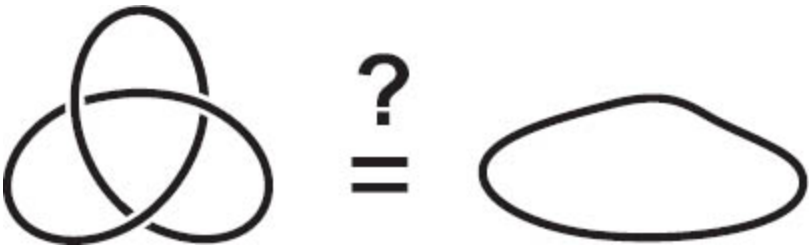
A dire il vero, questo esempio si avvicina ai limiti della mia capacità di visualizzazione. E questi limiti vengono ampiamente superati quando si tratta di sbrogliare mentalmente un disegno molto piú complicato di nodo banale, come ad esempio questo:

Non so se ci sono persone che riescono a sbrogliare mentalmente una cosa del genere, per trovare visivamente «evidente» che non c'è un vero e proprio nodo. L'idea mi spaventa e solo a immaginarla mi viene il mal di testa.

È proprio perché è cosí difficile capire che due disegni rappresentano lo stesso nodo che la teoria dei nodi è un argomento interessante.

Quando si è consapevoli che esiste un numero infinito di modi piú o meno complicati per disegnare lo stesso nodo, ci si rende conto che non c'è alcuna garanzia a priori che due nodi disegnati in modo differente siano davvero diversi. Una prima domanda lecita è, ad esempio:

Il nodo a trifoglio e il nodo banale sono davvero differenti?



In altre parole: è possibile prendere una corda annodata con un nodo a trifoglio, girarla per sciogliere il nodo senza tagliare la corda e stenderla su un tavolo in modo che formi un cerchio?

Se provate a farlo, avrete presto l'impressione che non sia possibile. Sperimentalmente, sembra che il nodo a trifoglio non sia uguale al nodo banale.

Mi piace questo esempio perché illustra molto concretamente in cosa consiste il dubbio cartesiano e la differenza radicale tra un'impressione e una dimostrazione rigorosa.

Vale la pena di fare un vero e proprio esperimento giocando con una cordicella per una decina di minuti e ponendovi la seguente domanda: quanto siete sicuri che il nodo a quadrifoglio sia davvero *diverso* dal nodo banale? 50%? 80%? 99%? 99.99%?

Ripropongo la domanda in modo molto piú schietto: ci mettereste *veramente* la mano sul fuoco?

Che garanzia avete che non ci sia un percorso tortuoso, un trucco che spunta dal nulla, che vi permetta di passare dal nodo a quadrifoglio al nodo banale?

È come quei rompicapi che sembrano irrisolvibili. Se avete la soluzione, siete sicuri che c'è una soluzione. Se non avete la soluzione, non è chiaro se non ci sia o se, semplicemente, non l'avete ancora trovata.

Tutti abbiamo l'impressione che il nodo a trifoglio sia diverso dal nodo banale, ma l'esistenza di disegni molto complicati del nodo banale ci dimostra che non possiamo fare affidamento sulla nostra prima impressione. Il fatto che una corda sembri terribilmente aggrovigliata non significa che lo sia davvero.

Si potrebbe comunque immaginare che il nodo a trifoglio possa essere sciolto e che il nodo banale possa essere ritrovato con una serie di manipolazioni cosí complicate che nessun essere umano ha ancora capito come fare.

A prima vista, sembra quindi impossibile raggiungere un livello di certezza del 100%. Per farlo, dovremmo considerare il numero infinito di modi possibili di piegare la cordicella. Anche se si passa un miliardo di anni a giocare con la corda, si può provare solo un numero finito di combinazioni.

La bellezza del ragionamento matematico è che può manipolare oggetti cosí evanescenti come i nodi e dare risposte certe al 100% a domande che, a prima vista, sembrano impossibili da risolvere con tanta certezza.

Con «oggetti evanescenti» intendo dire che si tratta di oggetti che, a prima vista, non sembrano fatti per essere rigorosamente manipolati dal linguaggio. Una corda annodata non è come un numero intero. Non dà l'idea di poter essere racchiusa in un'equazione. Non è qualcosa che sentiamo di poter cogliere con le parole.

L'esempio del nodo a trifoglio è abbastanza significativo. Abbiamo l'impressione che la corda sia annodata e di non poterla slegare senza tagliarla. Ma non possiamo dire in quale punto esatto della corda si trovi il nodo. Non si trova un punto preciso da indicare. Si può percepire il nodo, ma non si riesce mai a coglierlo veramente.

Quando ero studente, fui molto colpito dallo scoprire che era possibile cogliere i nodi con il linguaggio e fornire una prova completa, con una certezza del 100%, di questo risultato:

Teorema: il nodo a trifoglio è diverso dal nodo banale.

Lo schema della dimostrazione di questo teorema è spiegato a grandi linee in nota[4].

Impilare le arance

Pretendere che tutte le prove matematiche possano essere spiegate in modo semplice ai non specialisti sarebbe una bugia.

I problemi piú semplici da porre sono talvolta i piú difficili da risolvere. Ci sono molti problemi facili da porre ma del tutto irrisolvibili. Ci sono anche problemi facili da porre con soluzioni mostruosamente complicate o di cui si pensa che non abbiano alcuna soluzione semplice.

La congettura di Keplero è un esempio perfetto. Fornisce una risposta alla seguente domanda:

Qual è il modo migliore per impilare le arance?

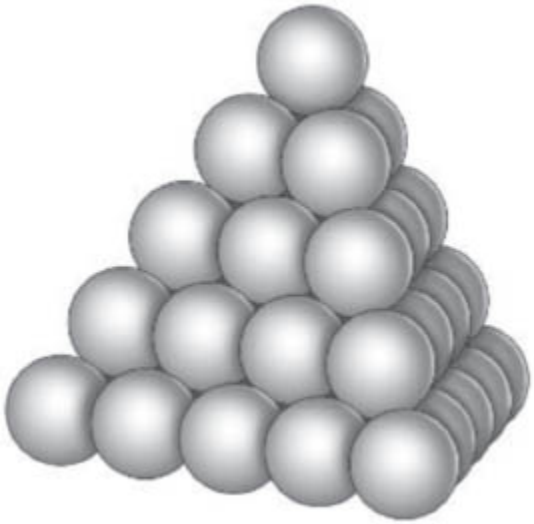
Il grande astronomo e matematico Giovanni Keplero (1571-1630) aveva intuito la soluzione già nel 1611, anche se non riuscí a dimostrarne la correttezza. Come abbiamo visto, un enunciato che si ritiene vero ma per il quale non è possibile fornire una dimostrazione rigorosa è ciò che i matematici chiamano una *congettura*.

Ai suoi tempi, le arance erano un bene di lusso. Il problema fu quindi formulato in termini di palle di cannone. Ma questo ovviamente non cambia il risultato.

Per essere piú precisi, la domanda riguarda le arance intese come sfere perfette, tutte della stessa dimensione. Se cerchiamo di riempire l'intero spazio con queste arance, qual è il modo di disporle che permette di ottenere la massima densità?

Con cubi di dimensioni identiche, è possibile riempire facilmente l'intero spazio senza lasciare spazi vuoti. In questo modo è possibile ottenere una densità del 100%. Ciò non è possibile con le sfere.

Chi vende le arance ama disporle in questo modo:



Con questa disposizione, la densità è di circa il 74.05%: lo spazio è pieno di arance per circa il 74.05% e c'è circa il 25.95% di spazio vuoto tra di esse. La congettura di Keplero afferma che questa densità è massima e che non c'è modo di disporre le arance con una densità maggiore.

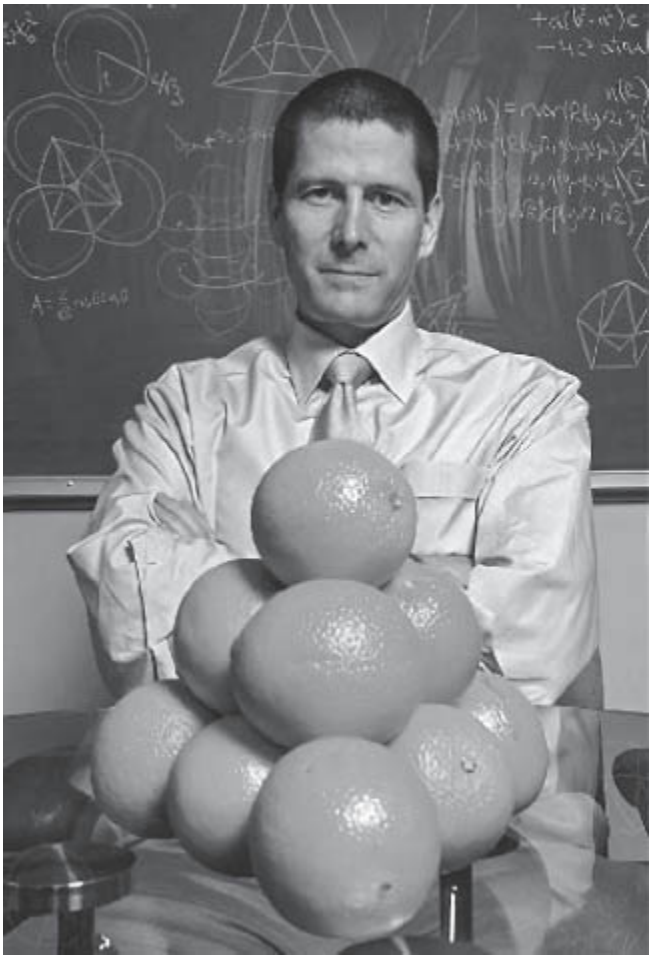
Intuitivamente, sembra abbastanza credibile. Ma non è chiaro come fornire una dimostrazione rigorosa.

Per piú di due secoli, nessuno è riuscito a fare progressi. Gauss fece la prima scoperta: nel 1831 dimostrò che se le arance devono essere disposte secondo uno schema regolare e ripetitivo, come gli atomi in un cristallo, allora il modo in cui i mercanti dispongono le arance è effettivamente il piú denso possibile.

Si tratta di un risultato eclatante, ma non dimostra completamente la congettura di Keplero. A priori, non c'è motivo di escludere che esista un modo molto strano, senza alcuna regolarità, di disporre centomila miliardi di arance, che ha una densità maggiore di qualsiasi disposizione regolare.

Personalmente, non ho idea di come affrontare un problema del genere. È un pensiero vertiginoso.

Dopo la scoperta di Gauss, ci vollero altri centocinquant'anni perché la congettura di Keplero fosse completamente risolta. La prima soluzione completa è stata fornita nel 1998 da Tom Hales, un matematico americano nato nel 1958[5].



Quindi la congettura è rimasta aperta per 387 anni. Dopo un'attesa cosí lunga, le abitudini sono difficili da cambiare. Si tende ancora a usare l'espressione «congettura di Keplero» per riferirsi alla risoluzione, mentre dovrebbe essere chiamato «teorema di Hales».

Non sono in grado di spiegare la dimostrazione a un alunno della scuola primaria o a chicchessia, perché non l'ho mai esaminata seriamente e mi ci vorrebbero diversi anni di lavoro per cercare di capirla.

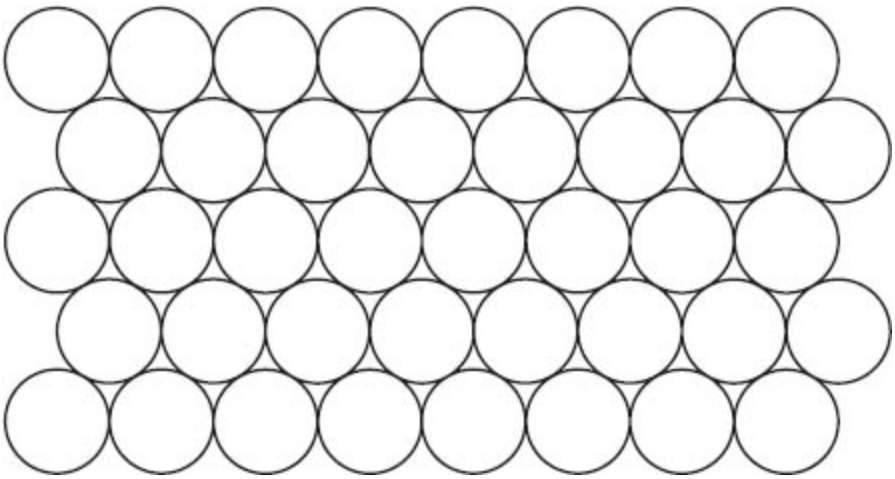
Nel settembre del 1998, Tom Hales ha presentato il suo articolo agli *Annals of Mathematics*, una delle piú prestigiose riviste di matematica. Prima che un articolo scientifico venga accettato per la pubblicazione, è generalmente inviato a un revisore anonimo che si esprime sulla sua validità. La dimostrazione di Hales era cosí difficile che gli *Annals of Mathematics* hanno dovuto affidare il lavoro di valutazione a un comitato di dodici revisori.

È stato persino necessario organizzare conferenze internazionali per cercare di comprendere la dimostrazione. Dopo quattro anni, il presidente del comitato dei *dodici* revisori ha dichiarato di essere «sicuro al 99%» della validità della prova. Il lavoro è stato infine accettato nell'agosto del 2005, quasi sette anni dopo la sua presentazione.

Una caratteristica unica della dimostrazione di Hales è che si basa in parte su un ragionamento matematico generale, di natura umana, e in parte su calcoli al computer, col fine di studiare migliaia di configurazioni particolari che il ragionamento generale identifica come possibili eccezioni. È questa miscela di matematica profonda e calcoli informatici complessi che rende la dimostrazione cosí difficile da affrontare. Ad oggi, nessun essere umano è in grado di dimostrare la congettura di Keplero con la sola forza del pensiero.

La congettura di Keplero riguarda le pile di sfere[6] nella dimensione 3, ma la questione della pila di sfere ottimale può essere posta in qualsiasi dimensione. Come abbiamo detto nel capitolo 9, è possibile fare geometria in dimensione n per qualsiasi intero n.

Nella dimensione 2, il problema è abbastanza facile da risolvere. Una sfera in dimensione 2 è un cerchio. Il problema riguarda quindi il modo piú denso di disporre le monete su un tavolo. La soluzione ottimale è la seguente:



Questo risultato è nei fatti molto piú facile da dimostrare rispetto a quello nella dimensione 3.

Non c'è nulla che ci impedisca di provare a guardare *oltre* la dimensione 3. Se non avete mai fatto geometria in nessuna dimensione, vi inquieterà pensare che ci sono persone abbastanza coraggiose da affrontare questo tipo di domande.

Quando un problema richiede quasi quattrocento anni per essere risolto nella dimensione 3, è probabile che si debba aspettare a lungo per vederlo risolto in una dimensione superiore.

La risposta non è ancora nota nella dimensione 4, né nella dimensione 5, 6 o 7.

Risultati spettacolari e inaspettati sono stati ottenuti nel 2016 da Maryna Viazovska, una matematica ucraina nata nel 1984. Viazovska ha iniziato risolvendo il caso nella dimensione 8 utilizzando tecniche nuove e molto eleganti.

Tre mesi dopo, insieme a quattro collaboratori, ha utilizzato le stesse tecniche per risolvere il caso nella dimensione 24, cosa che le è valsa la medaglia Fields nel 2022.

Queste sono le uniche dimensioni oltre la 3 per le quali si conosce la risposta.

È piuttosto inquietante pensare che si possa risolvere il problema nelle dimensioni 8 e 24[7] e non nelle dimensioni 4 o 5. Ma c'è una spiegazione: nelle dimensioni 8 e 24 si verificano fenomeni straordinari che danno origine a modi incredibilmente densi e armoniosi di «impacchettare» le sfere. Nella dimensione 24, l'impilamento è cosí denso che ogni sfera è in contatto con 196 560 sfere vicine.

All'inizio di questo capitolo ho parlato delle vertigini. Pensare che sia umanamente possibile descrivere il modo migliore per impilare le sfere nella dimensione 24 mi fa girare la testa. Ma è una vertigine che mi rende felice.

Immagino che per voi l'idea della dimensione 24 sia già di per sé vertiginosa. Il bello della matematica è che questa vertigine può essere superata.

Non c'è nulla che vi impedisca di capire che cos'è la dimensione 24 o a che cosa serve fare geometria in questo tipo di spazio (ci sono applicazioni reali per tutto questo: la geometria delle pile di sfere nella dimensione 24 è usata in particolare nei protocolli di trasmissione dei dati delle sonde Voyager 1 e 2, inviate dalla Nasa fuori dal sistema solare). Le basi della geometria a dimensione elevata sono intellettualmente alla vostra portata. Si

possono imparare in poche settimane. La parte difficile sarà superare la vostra paura.

Dimostrare teoremi come quelli di Tom Hales e Maryna Viazovska non è ovviamente cosa da tutti. Ciononostante, capire il significato di questi teoremi e apprezzarne la bellezza è alla portata di tutti, a costo di uno sforzo non troppo grande.

L'esempio di Maryna Viazovska può anche aiutare a superare un pregiudizio purtroppo persistente. Si sente ancora dire che le donne sono biologicamente incapaci di visualizzare gli oggetti nello spazio o addirittura di leggere le mappe stradali.

Se sentite questo tipo di assurdità, non esitate a parlare di Maryna Viazovska.

16. *Iperlucido*

Il mio primo ricordo di uno sforzo intenzionale e prolungato per *immaginare* qualcosa risale a quando avevo sette anni. Una sera a letto, dopo aver spento la luce e chiuso gli occhi, mi sono reso conto che, con uno sforzo di concentrazione, potevo immaginare di vedere il mio cartone animato preferito.

Non l'ho detto a nessuno.

Ricordo benissimo la meraviglia che mi ha suscitato e come, con le mie parole di allora, ho descritto il fenomeno a me stesso: mi sembrava di poter «guardare la televisione nella mia testa».

Potevo visualizzare immagini e scene che non avevo mai visto prima. Potevo anche immaginare nuovi episodi. Sono rimasto notevolmente impressionato e mi è piaciuto molto. Naturalmente, ho continuato.

Da allora, le transizioni tra veglia e sonno, sia quando mi addormento sia quando mi sveglio, svolgono un ruolo centrale per il mio sviluppo intellettuale. Proprio quello spazio viene occupato da tutti i progetti in cui mi lancio, non appena diventano piú seri, non appena qualcosa inizia a interessarmi davvero e quando mi trovo di fronte a una vera e propria sfida alla comprensione e alla creatività.

La trascrizione dei sogni è stato il primo vero lavoro di scrittura della mia vita.

Ho iniziato a interessarmi al dormiveglia e ai sogni quando avevo circa diciassette anni. Scriverli, all'inizio, era troppo difficile. Ho provato a raccontarli ad alta voce con un registratore. Il progetto era di raccoglierli, come in un diario o in un album di fotografie.

Sono stato costretto a rinunciare a questo progetto a causa di un fenomeno che non mi aspettavo e che è diventato rapidamente ingombrante.

Giorno dopo giorno, mentre cercavo di ricordarli e metterli in parole, i sogni diventavano piú ricchi e precisi.

Ho sognato sempre meglio. Sognavo cosí bene che era quasi imbarazzante.

La prima volta ero riuscito a ricordare solo piccoli frammenti, qualche briciola di un singolo sogno. Dopo due o tre settimane, ero in grado di raccontare cinque o sei sogni diversi al giorno, ognuno con una storia completa e abbastanza dettagliata da occupare diverse pagine di scrittura o lunghi minuti di registrazione.

È questo che mi ha spaventato. I ricordi dei miei sogni occupavano troppo spazio nella mia testa e nelle mie giornate. Avevo la sensazione che questo esercizio di introspezione avrebbe finito per divorarmi.

Dopo aver smesso di registrarli, ho continuato a scriverli. Ciò che mi interessava non era la ricerca di un significato, ma la limpidezza e la difficoltà dello scrivere.

La sfida della scrittura, per me, è proprio questo. Partire da immagini e sensazioni e cercare un modo di trascriverle in parole per renderle piú chiare e consistenti. Riportare situazioni, temi, posizioni di persone e oggetti, gesti e percorsi. Descrivere ciò che si vede e si sente nel modo piú semplice e fedele possibile. Catturare umori, musica, odori e consistenze. Quando lo si sa fare, si può fare qualsiasi altra cosa.

La scrittura dei sogni, in base alla mia esperienza, è la cosa piú vicina alla scrittura matematica.

Mi colpisce il numero di persone che dicono di non ricordare mai i sogni. Alcuni dicono di non sognare affatto. Questo è senz’altro impossibile. Tutti sogniamo, ogni notte.

Ricordare i propri sogni non è un dono che si riceve alla nascita. È una facoltà che si sviluppa da soli, attraverso la pratica. Ci sono tecniche per iniziare e tecniche per migliorare. Quanto piú accuratamente si riesce a trascrivere ciò che si vede, tanto piú si vede.

Per molto tempo ho tenuto un quaderno sul comodino, con una penna all’interno come segnalibro, per annotare i sogni e tutte le idee che mi venivano durante la notte. Ho persino imparato a scrivere nel buio pesto, alla cieca.

Quando smetto di scrivere i sogni, perdo rapidamente la capacità di ricordarli. Quando mi costringo a scriverli di nuovo, anche se all’inizio è solo un frammento, una parola o due, questa capacità ritorna gradualmente.

A volte è necessario insistere per diverse settimane. La cosa piú difficile è cogliere il primo frammento di un sogno dopo un lungo periodo passato senza riuscirci.

Da adulto, ho imparato a sfruttare meglio lo stato mentale molto particolare che precede il sonno. Piuttosto che *riflettere* sulle cose che mi preoccupano, ho imparato semplicemente ad *assorbirle*. La sfumatura è sottile ma fondamentale. Riflettere è il tentativo di trovare soluzioni, ma non funziona mai e impedisce di dormire. Assorbire significa invece contemplare senza obbiettivi specifici, in modo decontratto e disinteressato. È quasi come sognare.

Potrei sbagliarmi, ma ho l'impressione che questa tecnica per prender sonno aumenti la possibilità di svegliarmi la mattina con idee interessanti.

Un altro punto di vista

Il mio esercizio preferito di immaginazione geometrica lo faccio mentre mi sto addormentando.

Sdraiato a letto, con gli occhi chiusi, cerco di ricordare le stanze in cui ho dormito. Mi immagino al loro interno, immagino le dimensioni e l'orientamento del letto, la posizione delle pareti e del soffitto, delle porte e delle finestre. Ricreo la sensazione fisica di trovarmi sdraiato in una di quelle stanze, nel mio lontano passato. Cerco di provare quella sensazione con tutto il corpo. Scelgo la prima stanza che mi viene in mente, poi un'altra, un'altra ancora, e un'altra ancora, vagando senza un ordine che non sia quello dell'ispirazione. La cosa piú interessante è ritrovare una stanza che credevo di aver dimenticato.

Mi piace molto questo esercizio perché è facile e rilassante. È un buon esercizio per i principianti.

Come ho detto nel capitolo 1, ho iniziato molto presto a sviluppare una percezione intuitiva dello spazio e della geometria, senza vedervi alcun legame con la matematica che mi veniva insegnata a scuola.

È una cosa talmente vecchia che non so dire con esattezza quando sia iniziata. Il periodo in cui mi muovevo a occhi chiusi per memorizzare la posizione di pareti e oggetti è lo stesso in cui immaginavo i cartoni animati a letto di notte.

Ricordo bene lo stato d'animo in cui lo facevo. Molto presto, all'asilo, ho dovuto mettere gli occhiali perché ero miope. Nella mia immaginazione di bambino, credevo che la miopia fosse solo il primo stadio e che sarei diventato inevitabilmente cieco. Mi muovevo con gli occhi chiusi per esercitarmi in vista del giorno in cui sarei stato cieco.

È cosí che ho iniziato a sviluppare la capacità di visualizzazione geometrica. In seguito, ho avuto l'idea di usare intenzionalmente questa capacità per allenarmi a guardare il mondo da un altro punto di vista rispetto al mio.

Uso l'espressione «un altro punto di vista rispetto al mio» in senso molto concreto.

Avevo circa dodici anni quando un giorno il nostro insegnante di arte ci ha chiesto di disegnare i nostri astucci. Il mio l'ho disegnato *visto dall'interno*, con penne enormi e distorte dalla prospettiva. Nessuno mi aveva insegnato a disegnare in prospettiva, eppure mi sembrava naturale: disegnavo semplicemente ciò che vedevo.

Ero piuttosto orgoglioso di questo disegno e ricordo che i miei compagni di classe ne sono rimasti molto colpiti.

Quando avevo circa quindici anni, in classe abbiamo studiato *la geometria nello spazio*, cioè nella dimensione 3. È stato allora che ho capito che c'era un'enorme differenza tra la mia capacità di visualizzare e quella dei miei amici. È forse il ricordo piú surreale di tutta la mia carriera scolastica. Il contenuto del corso e gli esercizi mi sembravano completamente vuoti. Sembrava una lezione per l'asilo. Se l'insegnante avesse alzato l'indice e ci avesse chiesto quante dita vedevamo e noi avessimo dovuto rispondere solo «uno», la sensazione sarebbe stata la stessa.

Ho avuto il punteggio migliore senza capire dove fosse la difficoltà. Ma sapevo che la geometria nello spazio era un argomento che spaventava alcuni dei miei amici. Era cosí difficile che si vergognavano a parlarne.

Non avevo motivo di sospettare che i miei esercizi di *cambio del punto di vista* fossero cosí insoliti. Non ero consapevole del mio livello di sovrallenamento in geometria.

Il piú puro degli esercizi di cambio del punto di vista è questo:

1. Scegliete un punto di riferimento intorno a voi, ad esempio l'angolo opposto a dove siete all'interno di una stanza, o la finestra di una casa quando camminate per strada.

2. Provate a immaginare cosa vedreste se guardaste nella vostra direzione da quel punto di riferimento.

Non si tratta di un esercizio in cui c'è chi ce la fa e chi no. È un esercizio difficile per tutti. All'inizio si ha la sensazione di non riuscirci. Ma si vede per forza qualcosa, un frammento di immagine, un'idea confusa ed evanescente. È da questa che bisogna partire. L'obiettivo è migliorare la luminosità e la risoluzione dell'immagine, cercando di mantenerne la presenza piú a lungo e di vederne un maggior numero di dettagli.

Ho provato diverse varianti di questo esercizio. Ho anche provato cose stupide e irrealizzabili solo per sport.

Quando viaggiavo spesso in treno tra Parigi e La Rochelle, cercavo di memorizzare visivamente l'intero paesaggio, sempre dallo stesso lato del treno (lato ovest), e di riassemblarlo in un'unica immagine mentale. L'immagine da ottenere era molto allungata: 50 metri di altezza e 500 chilometri di lunghezza. Si trattava quindi di creare un'immagine 10 000 volte piú larga che alta e di riempirla completamente.

Non ci sono mai riuscito.

Vedere l'invisibile

Dopo aver usato l'immaginazione per «vedere» il mondo da altri punti di vista, ho preso l'abitudine di cercare sistematicamente di «vedere» tutte le cose che dovrebbero essere vere, anche se non sono visibili.

Il modo migliore per rendere concreto questo concetto è utilizzare l'esempio delle bolle di sapone.

Una bolla di sapone è sostanzialmente la stessa cosa di un palloncino. L'acqua saponata forma una membrana elastica che viene gonfiata dalla pressione dell'aria che sta all'interno. Per questo motivo le bolle sono sferiche: per un dato volume di aria, la sfera è la forma che riduce al minimo la superficie necessaria per racchiudere quel volume.

Quando una bolla si è appena formata, la si può vedere ondeggiare per qualche istante prima di prendere una forma sferica. Durante questa fase di oscillazione, è facile «sentire» che la superficie della bolla è elastica. La bolla ondeggia lentamente, come un palloncino pieno d'acqua. Questo movimento ci è familiare, «vediamo» le proprietà fisiche della bolla.

Mi sono allenato a continuare a «vedere» l'elasticità della bolla una volta che ha assunto la forma sferica. Mi sono allenato a «vedere» che l'aria all'interno della bolla ha una pressione maggiore di quella esterna.

Ho messo «vedere» tra virgolette perché so che non lo vedo davvero con gli occhi. È visivo e allo stesso tempo non è veramente visivo. Non sarei in grado di disegnare ciò che vedo. È una sensazione fisica particolare, localizzata nel mio campo visivo, come un'evidenziazione. In un certo senso, si potrebbe dire che è un'allucinazione. Ma è un'allucinazione coltivata, costruita e controllata.

Quando guardo un ponte, vedo le linee di forza. Vedo che alcune parti del ponte lavorano in compressione e altre in trazione.

Richiamo queste percezioni con un atto intenzionale, con un piccolo sforzo di concentrazione: mi permettono di vedere e capire meglio il mondo.

In sostanza, è lo stesso fenomeno che permette di capire che una corda è troppo tesa e si spezzerà, o che un palloncino è troppo gonfio e scoppierà. Avete imparato a vedere la tensione degli oggetti come se fosse una pellicola di realtà aumentata, un'informazione supplementare che si inserisce nel vostro campo visivo, proprio come il colore, ma a un altro livello di realtà.

Questi esempi possono sembrare banali. Cercare di vedere queste cose può sembrare puerile e futile. Ciononostante, penso che questo approccio, applicato sistematicamente nel corso della vita, abbia consolidato la mia comprensione scientifica e mi abbia permesso di produrre lavori matematici originali.

Ciò che non posso «vedere» o «sentire», anche quando so che è vero, ha per me uno status speciale. Non ignoro le informazioni esterne veicolate dal linguaggio, ma le tratto come *ipotesi*, senza crederci pienamente.

Finché non riesco a capire perché qualcosa dovrebbe essere vera, sono sospettoso. Tali informazioni possono rimanere in questo stato intermedio per molto tempo: ore, giorni, anni o perfino decenni.

A volte «capisco» all'improvviso cose che mi sono state insegnate da bambino o da adolescente. Al liceo, durante le lezioni di geografia, mi hanno insegnato che la deforestazione provoca l'erosione del suolo. Queste informazioni, ricevute attraverso il linguaggio, senza visualizzazione e senza una reale comprensione, mi erano entrate da un orecchio e uscite dall'altro. Non mi interessavano e non mi convincevano. Molto piú tardi,

sono finalmente riuscito a capire. Ricordo molto bene quel momento. Ero a una conferenza di matematica, durante una lezione in cui mi annoiavo perché non capivo nulla. Stavo guardando fuori dalla finestra e c'erano degli alberi.

Stavo giocando a visualizzare l'intero paesaggio. Ho immaginato gli alberi nel loro insieme, con le loro radici. All'improvviso, ne ho colto l'evidenza.

È stato visivamente molto impressionante. La rete di radici formava una gigantesca armatura che teneva insieme la terra e le pietre, come i tondini metallici tengono insieme il cemento armato. Quella struttura composita spiegava la resistenza fisica del terreno e il motivo per cui non era franato lungo la collina. Spiegava anche il fenomeno che avevo già visto e che mi aveva colpito: strappare il ceppo di un albero è di una difficoltà cosí straordinaria che si stenta a crederlo.

Un altro esempio: anche se sapevo che gli aerei potevano volare, una parte di me si rifiutava di crederci, perché non pensava che fosse normale e non capiva intuitivamente come fosse possibile.

Questa parte di me si esprimeva quando ero seduto in un aereo che accelerava sulla pista. Una vocina mi sussurrava qualcosa del tipo: «Stai scherzando, questa cosa è troppo pesante, non funzionerà mai, non riusciremo mai a decollare».

A dire il vero, sospetto che la maggior parte delle persone abbia la stessa vocina in testa. Ma non osa ammetterlo, per paura di fare la figura degli idioti.

Siamo socialmente condizionati a pensare che sia normale che gli aerei decollino, e a ridere all'idea che qualcuno possa dubitarne. Ma quanti di noi capiscono davvero perché gli aerei volano?

Non è sciocco nutrire forti dubbi sulla capacità di decollo degli aerei. È solo buon senso e indipendenza di pensiero.

I miei dubbi non mi hanno mai impedito di volare. Non ho negato l'ovvio. Vedevo che gli aerei erano in grado di volare. L'ho accettato, a malincuore, perché non avevo scelta, perché ero stato messo di fronte al fatto compiuto. L'ho accettato da un punto di vista pratico, ma non da un punto di vista sensoriale.

Va da sé che sono molte di piú le cose che sono costretto ad accettare in questo modo rispetto a quelle che sono effettivamente in grado di capire.

Solo pochi anni fa ho accettato pienamente l'idea che gli aerei siano in grado di volare. Ho imparato a sentirlo *fisicamente*. Per farlo, ho dovuto imparare a percepire la densità dell'aria e il fenomeno della portanza. Ho dovuto rendermi conto che gli aerei sono molto piú leggeri di quanto sembrano. Ho dovuto imparare a sentire le ali, il modo in cui si sollevano e si deformano, la loro struttura interna, come sono attaccate all'aereo e perché non si rompono.

Alla fine, il mio intuito ha imparato a considerarlo normale. L'aereo è diventato come un'estensione del mio corpo.

Nella mia nuca

Avendolo confrontato con principi matematici difficili e avendone fatto letteralmente una carriera, ho sviluppato una grande fiducia nel mio intuito geometrico.

Esso riguarda soprattutto oggetti dei quali la maggior parte delle persone non percepisce la natura geometrica. Per esempio, non mi ha sorpreso quando ho saputo della scoperta che l'*Homo floresiensis* e l'*Homo denisovensis*, due specie umane estinte, coesistevano con la nostra specie in tempi non molto lontani. Mi aspettavo queste scoperte, per ragioni che hanno a che fare con la mia intuizione di ciò che non posso chiamare altro che «geometria del vivente» e «geometria della localizzazione dei fossili».

Questo non fa di me un mago. So bene come ho costruito questo particolare modo di vedere e capire il mondo. Ho semplicemente spinto all'estremo una facoltà che è naturalmente presente in tutti noi.

Ciò che la matematica mi ha insegnato è che è davvero possibile andare avanti e progredire nella vita senza rinunciare al desiderio infantile di restare «terra terra», di accettare solo ciò che è reale ed evidente.

Nessuno mi aveva detto che era possibile. Ho inventato nel mio cantuccio questi esercizi di immaginazione e visualizzazione, senza prevedere che avrebbero avuto il potere di trasformarmi a loro volta.

In matematica, come in molti altri campi, la creatività è solo la forma ultima della comprensione, che a sua volta è solo un prodotto naturale della nostra attività mentale. È ciò che si crea quando ci forziamo a continuare a guardare cose che ci mettono in soggezione finché non diventano familiari e ovvie.

Ci sono molte maniere per avvicinarsi alla matematica. Ognuno vi entra con i propri punti di forza e di debolezza. La geometria è uno dei miei punti di forza fin dall'infanzia e ho una lunga storia di immaginazione visiva.

Ho anche le mie debolezze e i numeri ne fanno parte. Detto questo, non me la cavo male neanche con loro. Ho acquisito un certo grado di familiarità. Li capisco a un certo livello. Ma non mi sono mai sentito creativo nella teoria dei numeri o in aritmetica. Come un tennista con un rovescio relativamente debole che si sposta per giocare un dritto, ho sviluppato l'abitudine di evitare i numeri quando possibile, interpretando gli enunciati quantitativi in modo geometrico.

La mia piú grande debolezza è l'incapacità di orientarmi tra notazioni complicate, di seguire, senza bloccarmi, un ragionamento con molti simboli e formule. Intere aree della matematica, in particolare l'analisi, mi hanno scoraggiato per questo motivo. Con il tempo, la situazione non ha fatto che peggiorare, perché la mia pazienza è diminuita.

In alcune materie in cui inizialmente non ero molto forte, sono comunque riuscito a fare progressi. Per comprendere le strutture astratte dell'algebra, che erano cosí difficili per me a vent'anni, ho imparato a sviluppare una forma speciale di intuizione sensoriale.

Sono sensazioni molto forti, ma impossibili da esprimere a parole. Comprendo certi concetti matematici attraverso sensazioni motorie non visive, tensioni e linee di forza all'interno del corpo, come se potessi trasportarmi dentro questi oggetti e sperimentarli *dall'interno*.

Sento questa matematica nella nuca, nella colonna vertebrale, nel midollo spinale.

L'unico modo in cui posso descriverla è attraverso un esercizio di immaginazione che mi ha parecchio aiutato quando ho cercato di fare progressi su questi argomenti. Guardavo un oggetto, ad esempio un flacone di shampoo sul bordo della vasca da bagno, e mi ponevo una domanda: se il mio corpo avesse la forma di questo flacone, cosa proverei fisicamente?

Facendo lo stesso esercizio con gli oggetti matematici, sono arrivato a comprenderli. Nell'anno in cui ho compiuto trentacinque anni, questa tecnica mi ha permesso di vivere il periodo di creatività piú intenso della mia carriera.

Tutto è iniziato con una banale osservazione, che consisteva nel tradurre nel linguaggio della teoria delle categorie una domanda che mi stavo ponendo sulla geometria di certe trecce in dimensione 8. Questo legame

inaspettato tra due intuizioni di natura molto diversa ha gettato nuova luce su problemi con cui mi ero scontrato per anni.

Era come se avessi costruito un ponte tra due aree del cervello che prima non comunicavano tra loro. C'è stata una sorta di grande scossa di comprensione, seguita da molte altre scosse secondarie. La mia immaginazione matematica si è enormemente riconfigurata. Ho cercato di prendere appunti, ma la mia comprensione progrediva piú velocemente della mia capacità di trascriverla.

Ogni giorno mi svegliavo con nuove idee. Alcune erano legate al problema che volevo risolvere (una congettura dei primi anni Settanta), altre mi hanno portato in direzioni lontane. Le ho trovate molto belle, ma ho dovuto rinunciare a seguirle perché era fisicamente impossibile esplorarle tutte insieme.

Questo stato di iperlucidità è durato sei settimane, il tempo necessario per dimostrare la congettura.

Non riuscivo a dormire ed ero esausto. Una notte mi sono svegliato alle quattro con la voglia di andare a vedere un libro che avevo comprato dieci anni prima (il secondo volume di *Representations and Cohomology* di Dave Benson), di cui all'epoca non avevo capito granché. Sono andato a prendere il libro nella mia biblioteca e ho letto un centinaio di pagine in un colpo solo, come se fosse un fumetto. Non avevo mai letto un libro di matematica in quel modo. Il motivo per cui riuscivo a leggere cosí velocemente era che sapevo già cosa c'era scritto: era come se l'avessi visto in sogno.

In quelle sei settimane ho avuto la sensazione di aver capito piú matematica di quanta ne avessi capita da quando avevo iniziato la tesi. Andavo cosí veloce che avevo il mal di mare. Era troppo violento, volevo che si fermasse. Stavo soffrendo fisicamente e avevo bisogno di riposare. Ma è stato impossibile. Era come se la matematica si fosse impadronita del mio cervello e stesse pensando nella mia testa, contro la mia volontà.

Per la prima volta nella mia vita, mi sono reso conto che la matematica estrema era uno sport pericoloso.

17. *Controllare l'universo*

Ho un'idea abbastanza precisa di quello che vi verrebbe in mente se doveste inventare il personaggio caricaturale di un giovane prodigio della matematica.

Senza dubbio non immaginereste un mattacchione che passa tutto il tempo a divertirsi con gli amici. E nemmeno una persona disinvolta, che prende le cose alla leggera, che brilla per socievolezza e senso della diplomazia.

Forse, al contrario, immaginereste qualcuno come Ted Kaczynski.

Ted Kaczynski è nato nel 1942 a Chicago. Le sue eccezionali capacità matematiche furono subito notate dal sistema scolastico. Misurarono il suo QI con un test: era 167, e gli fecero saltare un anno. Qualche anno dopo, saltò un'altra classe. Entrò ad Harvard nel 1958, a sedici anni.

Nel 1967 discusse la tesi di laurea in matematica e diventò il piú giovane assistente dell'Università di Berkeley.

Su un piano contiguo a questi successi, la vita di Ted era triste e solitaria. Chi lo ha conosciuto in gioventú lo descrive come taciturno, estremamente in ritardo nello sviluppo emotivo, incapace di comunicare e di instaurare vere relazioni.

Ad Harvard, gli studenti che vivevano nella sua stessa residenza universitaria ricordano questi due dettagli: la sua abitudine di suonare il trombone nel bel mezzo della notte e l'odore di cibo andato a male che usciva dalla sua stanza.

A quindici anni Ted aveva tali e tante difficoltà a socializzare con gli altri adolescenti che preferiva giocare con gli amici del fratello David, di otto anni.

David Kaczynski ricorda quel periodo, la sua ammirazione per l'intelligenza del fratello maggiore che tanto amava, ma anche lo sconcerto

per il suo strano comportamento. Cosa impediva a Ted di farsi degli amici?

Un giorno, quando David aveva otto o nove anni, andò da sua madre e le chiese: «Mamma, che cos'ha Teddy?».

La scala delle stranezze

Fin dall'inizio di questo libro, ho sostenuto che dobbiamo superare gli stereotipi sulla matematica e sui matematici. Non ho cambiato idea. Ciò non significa che questi stereotipi non esistano o che vengano fuori dal nulla.

Non è un segreto. Quando si scopre la comunità dei matematici, immediatamente ci colpisce l'abbondanza di persone «strane». La parola «strano» è un modo educato per dirlo. Ci sono vari gradi di stranezza. Alcuni matematici sono un po' strani. Altri lo sono decisamente meno. Altri ancora sono incredibilmente strani. In alcuni casi, la stranezza non è piú il concetto giusto. Solo una parola sembra appropriata: follia.

È uno dei grandi argomenti di conversazione tra i matematici. Ognuno ha decine di aneddoti da raccontare, comici e assurdi, cosí comici che a volte si stenta a crederci.

Ve ne racconto solo uno: ho cenato accanto a un matematico che si portava dietro un grosso sacco della spazzatura pieno di orari dei treni che conosceva a memoria, e con il quale l'unico modo per entrare in comunicazione era chiedere quali fossero le alternative per andare da New Haven a Filadelfia nel primo pomeriggio di domenica.

Andare oltre gli stereotipi significa tenere presente che la maggioranza dei matematici non è cosí. È assolutamente possibile fare matematica ai massimi livelli ed essere «normali». Si può anche essere carismatici, socialmente realizzati, calorosi ed empatici.

Piú ancora dell'eccentricità, l'umorismo è una caratteristica generalmente molto sviluppata nei matematici.

Questo non toglie che tra loro sia ampiamente diffusa un'intensa eccentricità, soprattutto tra i matematici piú influenti della storia. Nel capitolo 7 abbiamo descritto le scelte di vita di Alexander Grothendieck, la sua estrema solitudine e il suo ascetismo.

Un altro esempio eclatante è quello di Grisha Perel'man, che abbiamo già incontrato nel capitolo 10. Nato nel 1966 a Leningrado, è famoso per

aver dimostrato nel 2003 la congettura formulata da Poincaré nel 1904. Si tratta di un'impresa straordinaria, di una portata difficile da concepire.

Non solo Perel'man ha rifiutato la medaglia Fields, ma anche il premio di un milione di dollari assegnatogli nel 2010 dal Clay Mathematical Institute per la soluzione della congettura di Poincaré, inclusa nella lista dei *Millennium Problems* (un elenco di sette problemi ritenuti i piú difficili e determinanti per il futuro della matematica).

Nel 2005 Perel'man si è dimesso dall'incarico presso l'Istituto Steklov. Non rilascia interviste ed è difficile sapere cosa gli passi per la testa. La sua personalità è cosí intrigante che su internet circolano foto rubate, interviste false e voci assurde.

Senz'altro, non ha mai pronunciato l'affermazione che gli viene attribuita: «Cosa me ne farei di un milione di dollari, visto che posso già controllare l'universo?»

Quest'altra dichiarazione, invece, proviene da una fonte attendibile: «Non mi interessano i soldi o la fama. Non voglio essere messo in mostra come un animale in uno zoo. Non sono un eroe della matematica. Non sono nemmeno cosí brillante; per questo non voglio che tutti mi guardino»[1].

Possiamo solo ammirare l'intelligenza creativa di Perel'man, la sua forza mentale, la sua incrollabile determinazione e la sua incorruttibile nobiltà d'animo.

E allo stesso tempo, qualcosa ci disturba nella sua storia. Avvertiamo un certo disagio. È davvero questa la vetta della comprensione matematica? Va a finire sempre cosí? È davvero impossibile per loro rivolgersi agli altri e trovare un modo per comunicare?

Abbiamo la sensazione che questo non sia «normale», che se Perel'man si rifiuta di tagliarsi le unghie e continua, a cinquant'anni, a vivere da solo con la madre in un piccolo appartamento di San Pietroburgo, è perché c'è qualcosa che non va.

È possibile. Ma, alla fine, che ne sappiamo? Perel'man è una delle menti piú brillanti di questa terra. Non sta facendo del male a nessuno e ha il diritto di vivere la sua vita come meglio crede. Non abbiamo il diritto di giudicarlo.

È la matematica a rendere le persone «strane»? Non credo. Direi piuttosto che sa come accogliere persone che erano già strane di loro.

La matematica è uno dei pochi campi in cui è possibile ottenere grandi risultati malgrado immense difficoltà relazionali. Per le persone

inizialmente un po' «strane», «diverse», non troppo a loro agio nella società, può essere un percorso di socializzazione e realizzazione. (Tenderei a includermi in questa categoria.)

Quindi non credo che la matematica sia davvero «pericolosa».

Tuttavia, è controindicata in un contesto particolare, dove sembra avere il potenziale di indurre effetti collaterali catastrofici. A giudicare dagli esempi riportati nella storia con inquietante regolarità, la matematica sembra avere il potenziale, in alcuni casi, di alimentare e amplificare una particolare patologia mentale: la paranoia.

Nel cuore delle tenebre

Nella scala delle stranezze, Ted Kaczynski è al primo posto.

Ma la creatività non è proporzionale alla stranezza. E la precocità non è sempre segno di una carriera brillante.

Ted Kaczynski non è mai stato un grande matematico. La sua scarsa produzione scientifica non è di particolare interesse.

Il 30 giugno 1969, all'età di ventisette anni, Ted Kaczynski si dimise bruscamente dal suo incarico a Berkeley senza dare la minima spiegazione. Due anni dopo, si trasferí in una baita in mezzo agli alberi, costruita con le proprie mani in una zona remota del Montana.

Scelse di vivere lí da solo, senza acqua corrente né elettricità.

Già nel 1971, il suo diario rivela un intento criminale: «Il motivo alla base di ciò che sto per fare è semplicemente la vendetta personale. Non mi aspetto di ottenere niente»[2].

La sua idea cresce negli anni. In seguito, Kaczynski dirà che voleva iniziare una rivoluzione. Ma per tutto il tempo rimane fedele a un sentimento che sembra essere visceralmente ancorato in lui: l'odio per l'«establishment scientifico e burocratico», che accusa di condurre un'offensiva contro la sua libertà personale e la libertà in generale.

Anno dopo anno, durante lunghe passeggiate solitarie nel cuore della foresta con la quale letteralmente si identifica, Ted Kaczynski elabora il suo piano. Vuole vendicarsi della società industriale, per tutto quello che gli ha fatto e per la violenza che infligge agli alberi, cinicamente abbattuti per costruire nuove strade.

Con metodo e determinazione, si rinchiude in un’incredibile deriva omicida.

Fu catturato solo nel 1996, al termine dell’indagine piú lunga e costosa della storia dell’Fbi. È durata piú di diciassette anni e ha coinvolto almeno centocinquanta persone a tempo pieno.

Ted Kaczynski è ora detenuto nella prigione piú sicura degli Stati Uniti, a Florence, in Colorado. Tra i suoi compagni di detenzione ci sono Zakariyya Musawi, uno dei terroristi dell’11 settembre, e El Chapo, il signore della droga messicano. Sta scontando una pena senza condizionale di otto ergastoli.

La sua è una storia cupa, ma deve essere raccontata. Ci insegnerà qualcosa di fondamentale sulla razionalità, sul suo potere, sui suoi limiti e pericoli, sul modo giusto e sbagliato di usarla.

Unabomber

Il 15 novembre 1979, sul volo American Airlines 444, partito da Chicago alla volta di Washington, i passeggeri sentirono un rumore sordo. La cabina si riempí di fumo acre e le maschere di ossigeno si staccarono. Il fumo era cosí denso che entrava nelle maschere.

Il pilota riuscí a fare un atterraggio di emergenza. Dodici persone furono ricoverate in ospedale per inalazione di sostanze tossiche. A terra, le prime analisi non lasciavano spazio a dubbi: l’aereo trasportava una bomba che, se avesse funzionato correttamente, lo avrebbe distrutto in volo.

Fu subito trovata una relazione con due pacchi bomba lasciati nel maggio del 1979 nel campus della Northwestern University, vicino a Chicago. Era solo l'inizio di una lunga, lunga serie.

Il 10 giugno 1980, Percy Wood, amministratore delegato della United Airlines, fu gravemente ferito da un pacco bomba inviatogli a casa, a Lake Forest, un sobborgo di Chicago. Nel 1981, una bomba fu disinnescata nel campus dell'Università dello Utah.

Gli attentati proseguirono fino al 1995. Sedici bombe uccisero tre persone e ne ferirono ventitré. Gli obiettivi erano università (un edificio di Berkeley è stato preso di mira due volte) e aziende legate all'aviazione, all'industria o alla tecnologia (la sede della Boeing, negozi di elettronica, un lobbista dell'industria del legno ecc.).

In questo indecifrabile caso di terrorismo seriale, gli investigatori si aggrapparono a scarni indizi.

Anche se le rivendicazioni erano firmate FC, per «Freedom Club», la convinzione era di avere a che fare con un uomo solo. Tracciarono il suo profilo psicologico. Si trattava di uomo con un odio feroce per le università e le compagnie aeree, e anche ossessionato dal tema del legno e della foresta, come sembravano indicare sia la scelta degli obiettivi sia i materiali utilizzati per la fabbricazione delle bombe. Alcune contenevano pezzi di corteccia, altre erano camuffate in modo da sembrare tronchi.

L'Fbi e i media lo soprannominarono «Unabomber», acronimo di «University and Airline Bomber».

Fu davvero difficile per gli investigatori analizzare le bombe. Di solito è possibile far «parlare» ogni frammento recuperato: esaminando anche un solo chiodo, si può sperare di identificarne il produttore e i negozi che possono averlo venduto.

Il problema era che i chiodi usati da Unabomber erano fatti a mano, uno per uno. Non c'erano prove utilizzabili, né impronte digitali. I componenti delle bombe erano stati accuratamente passati con la carta abrasiva.

Il terrorista era una persona paziente e scrupolosa che non aveva paura di costruire tutto da sé.

Gli investigatori dovettero aspettare fino al 1995 per trovare una pista. Quell'anno, Unabomber inviò un lungo testo dattiloscritto al *New York Times*, al *Washington Post* e a *Penthouse*, in cui diceva che avrebbe rinunciato ai suoi attentati se il testo fosse stato pubblicato. Su

raccomandazione dell'Fbi, il *New York Times* e il *Washington Post* lo pubblicarono il 19 settembre 1995.

Il manifesto di Unabomber, «La società industriale e il suo futuro», è meticolosamente costruito e argomentato. Composto da paragrafi numerati da 1 a 232, è una critica radicale della società moderna e dell'influenza che la tecnologia ha sulle nostre vite. Secondo Unabomber, non c'è nulla da salvare: l'intero sistema deve essere abbattuto.

Il manifesto è a volte molto pertinente e a volte completamente assurdo. Alcuni passaggi riflettono preoccupazioni che non ci si aspetterebbe di trovare in un terrorista: «È vero che ci si può porre serie domande sulle basi della conoscenza scientifica e su come si possa definire il concetto di realtà oggettiva, ammesso che sia possibile farlo. Ma è chiaro che i moderni filosofi di sinistra non sono semplicemente dei logici con la mente fredda che analizzano sistematicamente i fondamenti della conoscenza».

Leggendo questo paragrafo, David Kaczynski fu colpito da una frase: «logici con la mente fredda». Ricordava una lettera in cui suo fratello Ted usava esattamente le stesse parole per dire esattamente la stessa cosa.

Sospettando che suo fratello fosse il criminale piú ricercato degli Stati Uniti, David Kaczynski si trovò di fronte a un terribile dilemma morale. Avrebbe dovuto denunciarlo e fargli rischiare la pena di morte, o avrebbe dovuto tacere e diventare complice di altri possibili omicidi?

Dopo averci pensato a lungo, scelse di parlare con l'Fbi. Questa informazione portò all'arresto di Ted Kaczynski il 3 aprile 1996.

«Una grossolana approssimazione della verità»

All'inizio del 1996, quando gli investigatori si trovarono di fronte a questa pista inaspettata, cercarono di valutarne la credibilità. Qualcosa li preoccupava. La biografia di Ted Kaczynski non corrispondeva all'immagine che si erano fatti di Unabomber.

Alcuni elementi coincidevano, come lo stile di vita da survivalista, ma il suo livello di istruzione e il suo passato da matematico furono una sorpresa.

Per togliersi ogni dubbio, l'Fbi decise di consultarsi segretamente con Bill Thurston, allora direttore del Mathematical Science Research Institute di Berkeley.

Leggendo il manifesto, Thurston non ebbe esitazioni. Gli fu subito chiaro che il testo era stato scritto da un matematico.

Non so quali prove abbia usato Thurston per giungere a questa conclusione. Ho cercato di individuare gli indizi che aveva trovato Thurston (ma non è la stessa cosa una volta che si conosce l'epilogo della storia), e sono rimasto particolarmente colpito dagli ultimi paragrafi. Dopo essere stato molto assertivo per decine di pagine, Kaczynski sottolinea improvvisamente la fragilità dell'edificio delirante che ha impiegato venticinque anni per costruire:

> NOTA FINALE
> 231. In questo articolo abbiamo fatto affermazioni imprecise […] e alcune delle nostre affermazioni potrebbero essere semplicemente sbagliate. […] E certamente in una discussione come questa ci si affida molto al giudizio intuitivo, che a volte è sbagliato. Quindi non pretendiamo che questo articolo esprima qualcosa di diverso da una grossolana approssimazione della verità.

La nozione di verità è al centro delle preoccupazioni di Kaczynski. Critica i filosofi moderni per aver portato avanti un «attacco alla verità e alla realtà».

Ma che cos'è la verità? Come può Kaczynski affermare che il suo manifesto è solo un'approssimazione, e allo stesso tempo trovare legittimo uccidere in nome di questa verità? Intende forse dire che ha personalmente accesso alla verità, anche se non l'ha trascritta completamente nel suo manifesto?

Pur riconoscendo le debolezze della sua argomentazione, Kaczynski sembra convinto di avere ragione contro il mondo intero. Non è in grado di fornire una dimostrazione completa, ma non se ne preoccupa: per lui tutto è evidente. Ha *costruito* le sue certezze e le ha organizzate in un sistema coerente in cui gli altri non trovano posto.

Quando apprende dalla stampa che, per la prima volta, una delle sue bombe ha ucciso qualcuno e che la vittima è stata «fatta a pezzi», può celebrare l'evento nel suo diario: «Eccellente. Il modo piú umano per eliminare qualcuno».

Tutto questo fa nascere un pensiero inquietante. E se Kaczynski avesse usato la tecnica dei matematici per raggiungere questo stupefacente livello di autoradicalizzazione?

Non sorprende affatto che una tecnica che ha lo scopo di riprogrammare l'intuizione possa rivelarsi pericolosa. Dopo tutto, si può finire al pronto

soccorso anche solo per aver maneggiato un pelapatate o un coltello da ostriche.

Secondo lo psichiatra che lo ha esaminato prima del processo, Ted Kaczynski soffre di schizofrenia paranoide. Secondo Kaczynski, questa diagnosi è una persecuzione politica. Crede di essere sano di mente. I suoi avvocati puntavano a farlo considerare non penalmente responsabile, ma lui rifiutò questa strategia, scegliendo invece di dichiararsi colpevole.

Il delirio paranoico è un parente stretto del ragionamento matematico. Per certi versi è il suo gemello cattivo. Molte persone tendono a confonderli. Esiste tuttavia un criterio molto semplice per distinguerli. Torneremo su questo punto.

«Che cosa deve fare un matematico?»

Nel 2010, due anni prima della sua morte, Bill Thurston sembra ancora molto preoccupato per il tragico destino di Ted Kaczynski.

Si è preso il tempo di scrivere una lunga risposta a una domanda posta su MathOverflow, un sito web collaborativo per la comunità matematica. La domanda proviene da un utente di nome Muad, evidentemente un giovane studente un po' insicuro. Si intitola «Che cosa deve fare un matematico?»[3].

Muad si chiede come può contribuire alla matematica. Ritiene che «la matematica è fatta da persone come Gauss o Eulero», il cui lavoro si può solo cercare di capire, senza che questa comprensione porti nulla di nuovo. Il suo timore è che non ci sia piú niente da scoprire per le persone come lui, le persone normali, quelle che non hanno «talenti speciali».

Sono pochi gli studenti di matematica a non essersi mai posti domande come questa. La risposta di Thurston offre un cambio di prospettiva piuttosto radicale:

«Il prodotto della matematica sono la chiarezza e la comprensione. Non i teoremi in sé».

«Il mondo non soffre di un eccesso di chiarezza e comprensione (per usare un eufemismo)».

«La vera soddisfazione che viene dalla matematica è imparare dagli altri e condividere con gli altri. Ognuno di noi ha una comprensione chiara di

alcuni argomenti e confusa di molti altri. Non c'è modo di esaurire le idee che hanno bisogno di chiarimenti».

Thurston definisce la matematica come un progetto umano collaborativo rivolto alla comprensione e alla condivisione, e non come la ricerca di verità eterne. Senza la comprensione umana, i teoremi non hanno valore. Non importa chi ha dimostrato per primo questo o quel risultato. Ciò che conta è il significato che diamo a questi risultati. La vera matematica è viva e vegeta, ed è in tutti noi.

La risposta di Thurston può sembrare banale, ma rimette profondamente in discussione il modo in cui la matematica è stata proposta per oltre due millenni. È uno dei messaggi principali di questo libro, e ci torneremo.

Thurston continua:

«Siamo animali profondamente sociali e profondamente istintivi, al punto che il nostro benessere dipende da moltissime cose che facciamo e che sono difficili da spiegare da un punto di vista intellettuale».

«La pura ragione rischia di portarvi fuori strada. Nessuno di noi è abbastanza intelligente o saggio per cavarsela con il solo intelletto».

È proprio in questo punto, all'espressione «fuori strada», che Thurston include un riferimento diretto a Ted Kaczynski, inserendo un link alla pagina di Wikipedia.

Dire che «la pura ragione rischia di portarvi fuori strada» sembra una banalità, un suggerimento di buon senso ma troppo vago e non abbastanza originale per dargli importanza. Non è questo il caso: Thurston è molto serio. Sa esattamente di cosa sta parlando e sta dicendo qualcosa di preciso.

Nel capitolo 14 abbiamo ricordato il progetto di Cartesio di ricostruire da zero la scienza e la filosofia, e di contare sulla nostra capacità innata di trovare evidente ciò che è vero. Abbiamo detto che questa forma di pensiero, il razionalismo, aveva incontrato degli ostacoli che Cartesio non aveva previsto.

Quando Thurston dice che «nessuno di noi è abbastanza intelligente» e che «la pura ragione rischia di portarvi fuori strada», è a questo che si riferisce.

Perché il pensiero matematico è cosí efficace? Cionondimeno, quali sono i suoi limiti e quali sono i limiti della razionalità? Come possiamo distinguere il ragionamento matematico dal delirio paranoico?

La risposta a queste domande non sta nella matematica in sé, ma nello stretto rapporto che essa ha con il nostro linguaggio e con i meccanismi

della nostra intelligenza.

Questo è l’argomento che ci occuperà fino alla fine del libro.

18. *L’elefante nella stanza*

Avete sempre saputo che c’era un problema con la razionalità.

Si pensa che la razionalità sia la base della nostra civiltà o, quantomeno, è cosí che ci dicono a scuola. Ci insegnano a organizzare le nostre idee in modo logico e strutturato. Ci insegnano a distinguere un ragionamento valido da uno che non lo è. Ci insegnano a disdegnare ciò che non è logico, non è rigoroso, non è coerente.

Naturalmente, nessuno è cosí stupido da credere a questa storia. Facciamo solo finta di crederci. Non appena la lezione è finita, non appena si chiude il portone della scuola, continuiamo la nostra vita come se il pensiero logico non avesse alcuna importanza.

Credere che un giorno potremo diventare razionali è ingenuo come credere che un giorno potremo smettere di mangiare grassi e zuccheri.

Il paradosso è che tutto questo non ci impedisce di ricorrere di nascosto alla razionalità.

Quando siete veramente preoccupati per qualcosa, quando soffrite per amore, per una questione sul lavoro, per una difficoltà nella relazione con qualcuno a cui tenete, ricorrete istintivamente al metodo dei matematici.

La sera, a letto, cercate di capire. Rimuginate. Fate scorrere le immagini che pescate dal profondo della memoria e dell’immaginazione. Giocate a Lego con queste immagini mentali. Cercate di organizzarle, di metterle insieme, per creare qualcosa che abbia un senso, che stia in piedi.

A volte avete la sensazione di capire. Le immagini mentali si incastrano tra loro. Reinterpretate un evento del vostro passato in modo nuovo. Notate un dettaglio, un nuovo elemento, qualcosa che avete sempre avuto sotto il naso e che fino a quel momento era passato inosservato.

Ora che lo vedete, tutto ha senso. È una rivelazione, una scoperta che vi entusiasma e che volete condividere.

Ne parlate con i vostri migliori amici. Subito notate nei loro occhi qualcosa che vi inquieta. Sembrano contrariati e al tempo stesso preoccupati per voi. L'unica cosa che sanno dirvi è: «Non razionalizzare troppo».

La cosa peggiore è che sapete che hanno ragione. Quando qualcuno vi descrive un suo ragionamento, nel quale tutti i pezzi si incastrano troppo bene, sentite che c'è qualcosa che non va: ci ha pensato troppo e la cosa vi insospettisce.

Per esempio, il fatto che uno passi vent'anni a riflettere sulle cause del malessere della nostra civiltà e scriva 232 paragrafi in cui tutto si incastra miracolosamente, non è affatto rassicurante. Non pensate che quel tipo ha ragione su tutto, piuttosto pensate: «Quell'uomo non deve avere molti amici».

Se la vostra sfiducia nella razionalità fosse semplicemente una questione di pigrizia intellettuale, una mancanza di gusto per le cose impegnative, non sarebbe poi cosí grave. Potreste far fare il lavoro ad altri e comunque trarre vantaggio dal risultato.

Il problema è che non avete fiducia nell'esito del ragionamento. Sapete che il pensiero e il ragionamento non sempre portano a scoprire la verità. A volte avete addirittura l'impressione contraria: in alcuni casi, la razionalità ci allontana dalla verità.

Non si tratta di un problema di poco conto, è un problema enorme. Gli anglosassoni chiamano questo genere di cose «l'elefante nella stanza»: un problema cosí enorme e cosí gravido di conseguenze, cosí al centro della nostra vita, da essere circondato da un gigantesco non detto.

Se vogliamo che l'umanità abbia qualche possibilità di affrontare le immense sfide che ci attendono, dovremmo cominciare a metterci d'accordo su questo: il metodo di Cartesio funziona davvero o no?

Sabbia e fango

Quando Cartesio formulò il progetto di ricostruire la scienza e la filosofia da zero, il suo approccio era facile da comprendere.

Constatò che i piú grandi scienziati non riuscivano a mettersi d'accordo sulle questioni piú elementari. Spesso la loro cosiddetta conoscenza era solo un'opinione costruita «sulla sabbia e sul fango». Al contrario, la matematica è costruita sulla roccia. Questo è ciò che affascina Cartesio:

«Mi meravigliavo del fatto che, essendo i loro fondamenti cosí stabili e solidi, non si fosse costruito su di essi niente di piú elevato».

Poiché il metodo dei matematici si dimostra cosí efficace da produrre verità che attraversano i millenni senza fare una piega, non potremmo applicarlo al di fuori della matematica e dunque scoprire verità incrollabili?

Oggi conosciamo la risposta. Purtroppo, è negativa. No, non possiamo.

O meglio, la risposta è in parte positiva e in parte negativa. Il metodo dei matematici può essere applicato anche al di fuori della matematica. Non avrei scritto questo libro se non avessi voluto incoraggiarvi a farlo. Cartesio aveva ragione: è un metodo di grande potenza e di grande fertilità. Ci aiuta a capire il mondo e ha il potere di renderci effettivamente piú intelligenti. In ogni caso non abbiamo un piano B, nessun altro metodo che offra gli stessi benefici è disponibile.

Ma quando lo applichiamo al di fuori della matematica, dobbiamo fare attenzione: è solo all'interno della matematica che questo metodo ha il potere di produrre verità incrollabili.

Essere prudenti non significa vietarsi di riflettere, di *razionalizzare*, di cercare spiegazioni per ciò che non si capisce. Perché dovremmo scegliere di rimanere stupidi? Essere prudenti non significa restare confusi e indecisi, né decidere di smettere di «procedere con sicurezza in questa vita». Al contrario.

Essere prudenti significa semplicemente tenere presente che il metodo di Cartesio ha l'effetto di rimodellare le nostre rappresentazioni mentali e le nostre intuizioni, di rafforzarne la coerenza interna e di fabbricare certezze interiori che possono diventare dure come la roccia.

Questo è addirittura lo scopo del processo. Mira a rendere concrete le nostre convinzioni, ad ancorarle a prove indiscutibili e a una deduzione rigorosa. Il miracolo della nostra plasticità mentale ci permette di costruire certezze in cemento armato.

Solo che queste certezze a volte sono false.

Una sorta di muro invalicabile

Siete assolutamente certi che ogni gallina sia nata da un uovo precedentemente deposto da un'altra gallina. Con un ragionamento perfettamente rigoroso dal punto di vista logico, si dovrebbe dedurre

l’assoluta certezza che non è mai esistita una prima gallina, né un primo uovo, che le galline e le uova esistono dalla notte dei tempi. Galline e uova sono quindi preesistenti alla formazione del nostro pianeta.

È un esempio stupido, ed è ciò che lo rende importante. Se un ragionamento cosí semplice si rivela cosí profondamente sbagliato, quanta fiducia dovremmo avere nei ragionamenti piú sottili, quelli che sembrano seri e intelligenti?

Ho sempre trovato sconcertante che tutti sappiano di questa storia dell’uovo e della gallina, che tutti siano consapevoli dell’enormità del problema che pone, e che tutti continuino a far finta di niente.

Oggi è possibile frequentare l’università senza aver mai affrontato di petto l’argomento e le sue profonde implicazioni. È come se la nostra società avesse scelto di lasciare che ognuno di noi sguazzasse nella propria pozzanghera.

L’enigma dell’uovo e della gallina ci viene presentato come un «paradosso», una sorta di muro invalicabile della comprensione umana, davanti al quale non abbiamo altra scelta che inchinarci.

Ma non ci sono piú paradossi di quanto non ci siano trucchi o verità controintuitive per natura. Lo statuto di paradosso è sempre provvisorio, in attesa di essere risolto. Presentare i problemi come strutturalmente paradossali è solo un modo disonesto e pretenzioso per dire che non li capiamo.

Il primo livello di risoluzione dell’enigma dell’uovo e della gallina prende le mosse dalla teoria dell’evoluzione. La madre della gallina che abbiamo sotto agli occhi era un’altra gallina, leggermente diversa dalla prima gallina. La madre di quest’altra gallina era ancora un po’ diversa. Fin qui tutto bene. Abbiamo ancora a che fare con galline e uova che sembrano galline e uova.

Ma se si va indietro nel tempo di oltre centocinquanta milioni di anni, si incontra la madre della madre … della madre della gallina, che non era una gallina ma un dinosauro. Se andiamo ancora piú indietro nel tempo, ci imbattiamo in animali che non deponevano uova. Questo non ci dice che aspetto avessero, ma ci rassicura sul fatto che le galline non erano preesistenti alla formazione del nostro pianeta.

Questo primo livello di risoluzione del problema, tuttavia, ignora l’aspetto piú problematico dell’enigma: come è possibile che, partendo da ipotesi indiscutibilmente vere e seguendo un ragionamento

indiscutibilmente corretto, si possa arrivare a una conclusione indiscutibilmente falsa?

Questo è il vero enigma che la storia dell'uovo e della gallina ci pone di fronte.

La risposta sta nel secondo livello di risoluzione dell'enigma iniziale. È nota dalla metà del XX secolo. Ma è cosí sconcertante, inquietante e gravida di conseguenze che viene accuratamente nascosta ed esclusa da tutti i programmi scolastici.

La risposta è questa: il linguaggio umano è strutturalmente incompatibile con il ragionamento logico e non potremo mai avere una fiducia del 100% nelle verità espresse nel linguaggio umano e ottenute per deduzione logica.

Questo vale sia per la scienza ufficiale, per la «grande scienza», sia per i piccoli ragionamenti della vita quotidiana, quelli che facciamo di continuo. Non importa se diamo forma a questi ragionamenti con le parole, seguendo argomentazioni strutturate e logicamente coerenti, o se ci limitiamo a plasmare di nascosto immagini mentali nella nostra testa; e non importa se siamo consapevoli del nostro ragionamento, o se ci lasciamo guidare semplicemente dall'intuito.

La triste realtà è che, contrariamente a quanto affermava Cartesio, «le cose che concepiamo chiaramente e distintamente» non sono tutte vere.

A Cartesio era sfuggito un punto essenziale: tutti i ragionamenti, anche i piú solidi, alla fine crollano quando si allontanano dall'esperienza concreta, non per mancanza di rigore, ma perché il nostro linguaggio è costruito «sulla sabbia e sul fango».

L'unica eccezione è il ragionamento matematico, quando è articolato nel linguaggio ufficiale della matematica. Se questo linguaggio artificiale, freddo e inumano è incompatibile con il nostro abituale modo di pensare, è per un motivo molto semplice: è stato concepito per essere compatibile con il ragionamento logico.

Quando vogliamo allontanarci dalla nostra reale esperienza quotidiana, il formalismo logico ci permette di orientarci. È l'unico strumento con cui possiamo dare libero sfogo alla nostra pulsione verso la razionalità, senza limiti, complessi o tabú.

Al di fuori di tale contesto, la razionalità è costantemente minacciata dalla fragilità del nostro linguaggio e del nostro modo di percepire il mondo.

Il significato che diamo alle parole

Nel capitolo 6 abbiamo già detto che il linguaggio ufficiale della matematica, il formalismo logico, è un linguaggio estraneo a quello degli esseri umani e abbiamo fatto questo esempio per illustrare come funziona: in matematica, se avere una proboscide fa parte della definizione di elefante, allora un elefante a cui viene tagliata la proboscide cessa immediatamente di essere un elefante.

Questo rapporto strano e psicorigido con il significato delle parole è al centro del processo matematico. È una stranezza che spesso sconvolge i principianti. Eppure, la sua spiegazione è semplice: il metodo umano abituale di dare senso alle parole è intrinsecamente incompatibile con la nozione di ragionamento. Può essere seccante, ma è cosí.

Se ci si vuole dare la possibilità di scoprire verità solide con la forza del pensiero, allora si deve ricorrere necessariamente all'approccio formalista dei matematici.

Se ci si ostina a continuare a chiamare *elefante* un elefante a cui è stata tagliata la proboscide, allora bisogna rinunciare a fidarsi della propria capacità di ragionare. Infatti, qualsiasi verità generale sugli elefanti, nel momento in cui l'avete scoperta ragionando sul fatto che gli elefanti hanno la proboscide, sarà messa in discussione dalla scoperta di un singolo elefante senza proboscide.

Onestamente, se non si può nemmeno dire che hanno la proboscide, che senso ha cercare di parlare di elefanti? Potremmo anche smettere di pensare e stare zitti per una volta.

Il fenomeno ci è familiare. Ne siamo tutti vagamente consapevoli, anche se in genere ne sottovalutiamo l'importanza, perché fin dall'infanzia la conoscenza ci è stata presentata in un modo che nasconde con discrezione la polvere sotto il tappeto.

I dizionari ne sono un perfetto esempio. Ne abbiamo già parlato nel capitolo 8. Da una prospettiva ampia, un dizionario può sembrare una cosa seria, una cosa che ha senso. Tutti vogliamo che le parole che usiamo siano ben definite e che le frasi che pronunciamo abbiano un significato preciso. Ma se grattiamo leggermente sotto la superficie, ci imbattiamo in definizioni circolari.

L'errore sarebbe pensare che le persone che scrivono i dizionari non stiano facendo bene il loro lavoro e che ci sia un modo migliore, piú chiaro

e piú rigoroso, per definire le parole che usiamo.

Ma se le definizioni dei dizionari sono carenti, purtroppo è per una ragione profonda e strutturale: è rigorosamente impossibile definire effettivamente le parole della nostra lingua, e il nostro rapporto con il mondo è molto meno stabile di quanto pensiamo.

Gli elefanti non esistono

Partire da una parola del linguaggio quotidiano, lavorare per consolidarne la definizione per poi rendersi conto che è un'impresa impossibile: ecco un'esperienza inquietante e istruttiva che avreste dovuto fare almeno una volta nella vita.

Il mio esempio preferito sono gli elefanti. Ho trovato questa definizione in un dizionario: «Grande mammifero erbivoro, con corpo massiccio, pelle ruvida, grandi orecchie piatte, naso allungato simile a una proboscide e zanne d'avorio».

Ha il merito di essere pragmatica. Il suo approccio consiste nell'elencare varie caratteristiche che ci si aspetta di trovare in un elefante. È ovviamente una definizione circolare. A cosa assomiglia la definizione di proboscide? E quella di avorio?

Oltre alla circolarità, questa definizione ha anche il difetto di ignorare un aspetto essenziale: la nozione di specie animale[1].

È evidente che non abbiamo a che fare semplicemente con animali intesi come individui isolati e che possiamo invece raggrupparli in specie. Abbiamo inventato la parola «elefante» perché ci sembrava che i singoli elefanti che avevamo davanti avessero qualcosa in comune e che formassero una specie. Inventando la parola «elefante», abbiamo voluto dare un nome a quest'insieme di caratteristiche comuni.

In realtà, come sapete, gli elefanti non sono una ma due specie, gli elefanti africani e gli elefanti asiatici.

In effetti, è ancora piú complicato. Negli ultimi vent'anni, i biologi hanno capito che esistono due specie distinte di elefante africano: l'elefante della savana, il cui nome scientifico è *Loxodonta africana*, e l'elefante della foresta, *Loxodonta cyclotis*. Gli elefanti asiatici costituiscono una terza specie, *Elephas maximus*.

Se si volesse scrivere una definizione non circolare e scientificamente seria della parola «elefante», potrebbe essere del tipo: «Nome generico dato ai rappresentanti delle tre specie *Loxodonta africana*, *Loxodonta cyclotis* ed *Elephas maximus*».

Se non fosse che ora bisognerebbe dare una definizione seria di *Loxodonta africana*, *Loxodonta cyclotis* ed *Elephas maximus*. E per quanto possa sembrare sorprendente, nessuno è in grado di farlo.

In pratica, i biologi definiscono le specie utilizzando come punto di riferimento un determinato individuo, chiamato *olotipo*. Ad esempio, esiste un elefante specifico (morto da tempo) che ha l'onore di fungere da olotipo per *Loxodonta africana*. È, per cosí dire, «l'elefante zero», il portabandiera della sua specie.

Da un punto di vista scientifico, *Loxodonta africana* non è altro che l'insieme degli individui, vivi o morti, che «appartengono alla stessa specie» di questo elefante zero.

Resta solo da dare un significato preciso all'espressione «essere della stessa specie». È qui che le cose si complicano.

In qualsiasi definizione ragionevole di specie animale, si vorrebbe poter dire che una madre appartiene alla stessa specie dei suoi figli. Ma se da una parte si prende la madre della madre … della madre dell'elefante zero, e dall'altra parte la madre della madre … di vostra madre, prima o poi vi imbatterete nella stessa femmina, appartenente a una specie di mammifero oggi estinta e vissuta piú di centocinquanta milioni di anni fa insieme ai dinosauri. Questo è esattamente il problema dell'uovo e della gallina. La conclusione logica è che siete un elefante.

Per evitare questo problema, è necessario introdurre una nozione di distanza: siete della stessa specie di vostra madre, della madre di vostra madre e cosí via, ma non possiamo andare avanti cosí all'infinito, a meno che non rifiutiamo la teoria dell'evoluzione.

Come si determina il limite? La soluzione ufficiale si basa sul principio dell'interfecondità. Ciò porta alla seguente definizione, che si può trovare ad esempio su Wikipedia: «Una specie è una popolazione o un insieme di popolazioni i cui individui possono effettivamente o potenzialmente riprodursi l'uno con l'altro e produrre una prole vitale e fertile».

Il problema della fecondità della discendenza riguarda in particolare gli asini e i cavalli, che possono ibridarsi ma i cui figli (muli e bardotti) sono sterili. Si tratta quindi di due specie diverse.

Si potrebbe pensare che abbiamo finalmente una definizione logicamente rigorosa, ma non è affatto cosí. Secondo questa definizione, un individuo sterile è una specie a sé stante. Quando si castra il gatto, questo cambia specie. Questo ovviamente non ha senso, ma è l'applicazione rigorosa della definizione.

Piú seriamente, che dire dei casi in cui la prole è generalmente sterile ma a volte fertile? Esistono molti esempi documentati di muli fertili. Dove poniamo la linea di demarcazione? Dovremmo stabilire una soglia? Dovremmo decretare arbitrariamente che al di sotto dell'1% di possibilità di produrre ibridi fertili abbiamo a che fare con due specie diverse?

La nozione di interfecondità è intrinsecamente vaga e problematica. Quando due specie si separano, proprio nel momento in cui la definizione sarebbe piú preziosa, essa cessa di essere valida. Questo vale in particolare per le origini della nostra specie: il nostro Dna porta le tracce di una fertile ibridazione con gli uomini di Neanderthal. Vuol forse dire che l'*Homo sapiens* e l'*Homo neanderthalensis* sono una stessa specie, contrariamente a quanto comunemente accettato?

Oltre a queste incongruenze teoriche, la definizione ufficiale del concetto di specie pone enormi difficoltà pratiche. Se voglio sapere se sono un elefante della savana, devo accoppiarmi con una femmina di *Loxodonta africana*. Cosa faccio se non vuole? E se lo volesse ma non rimanesse incinta perché non è il momento giusto? Quante volte devo rifarlo?

Si ritiene che i biologi abbiano molto piú senso pratico dei matematici. Sarei curioso di sapere come lo impiegano.

Sapere vagamente di cosa stiamo parlando

La cosa piú strana di tutto questo è il contrasto tra la nostra incapacità di dare una definizione rigorosa al 100% del concetto di elefante e l'ovvietà con cui il concetto si presenta alla nostra intuizione.

Quando sentiamo la parola «elefante», ci sembra di sapere esattamente cosa significa. Quando vediamo un elefante, lo riconosciamo a colpo d'occhio. Abbiamo un'idea molto chiara di cosa siano gli elefanti.

I problemi sorgono solo nel momento in cui cerchiamo di chiarire la leggera vaghezza della prima definizione ingenua che potremmo dare, e nel momento in cui vogliamo renderla compatibile con un ragionamento logico

abbastanza semplice. È come se i tentativi di chiarire il nostro pensiero portassero ogni volta a delle incoerenze, che ogni volta dovessero essere risolte da nuove scoperte scientifiche, che a loro volta portano alla luce nuove incoerenze.

Qualcosa di semplice, concreto e persino scontato sembra impossibile da esprimere a parole.

Questa stranezza non è specifica della nozione di elefante. È un fenomeno universale che riflette la realtà neurologica dei nostri processi mentali e del nostro rapporto con il linguaggio. Torneremo su questo punto nel prossimo capitolo.

La dimostrazione piú eclatante della nostra incapacità di dare un significato preciso alle parole si trova negli scritti di Charles Darwin, nel 1859: «Non discuterò qui le varie definizioni che sono state date della parola “specie”. Nessuna definizione ha finora soddisfatto tutti i naturalisti; eppure, ogni naturalista sa vagamente di cosa parla quando parla di specie».

Una simile ammissione di impotenza, fatta nel secondo capitolo di un libro storico il cui titolo è proprio *L’origine delle specie*, la dice lunga su quanto la situazione sia senza speranza.

Non sappiamo mai veramente di cosa stiamo parlando, eppure riusciamo a scrivere libri sull’argomento.

Due lingue, due regole del gioco

In sostanza, se vogliamo davvero capire che cos’è la matematica e perché è onnipresente nel campo della scienza, dobbiamo partire dalla fragilità del nostro linguaggio[2].

La matematica è antica quanto il nostro bisogno di ragionare e, a tal fine, di fissare il significato delle parole. È un errore comune ridurla allo studio dei numeri e delle forme. Al di là del suo vocabolario tecnico, al di là dei teoremi e delle equazioni, la matematica è soprattutto un modo diverso di usare il linguaggio e di attribuire un significato alle parole.

Il linguaggio umano e quello matematico si sono evoluti in parallelo per migliaia di anni. Oggi sono talmente intrecciati che non sappiamo sempre distinguerli.

Nella vita quotidiana, nelle conversazioni piú ordinarie, ci muoviamo tra questi due modi di usare le parole, di solito senza rendercene conto.

Questo vale per tutti, anche per le persone convinte di non essere brave in matematica. A prescindere dalla nostra cultura e dal nostro livello di istruzione, tutti noi abbiamo acquisito un certo grado di familiarità con il processo matematico, nella misura in cui utilizziamo quotidianamente i modi di pensare che esso consente.

Inoltre, dal momento che nessuno ci ha mai spiegato come funziona il tutto, inciampiamo regolarmente. Passiamo da una lingua all'altra, dimenticando che seguono due logiche completamente differenti. In alcuni casi, questa dimenticanza può avere gravi conseguenze.

Ognuno di questi linguaggi ha la sua funzione, le sue regole del gioco, i suoi punti di forza e di debolezza. Ci sono ugualmente indispensabili.

	Linguaggio umano	**Linguaggio della matematica**
Forma di definizione delle parole	Riferimento a una percezione	Caratterizzazione assiomatica
Punti di forza	Rapporto diretto con la realtà, evidenza del significato delle parole	Coerenza, precisione, stabilità del significato, possibilità di parlare senza ambiguità di cose non visibili
Punti di debolezza	Indeterminatezza, incoerenza, instabilità del significato	Inumanità, impossibilità di interpretare intuitivamente in modo corretto al 100%
Compatibilità con il ragionamento logico	No	Sí
Prodotto della riflessione	Ipotesi esplicative, teorie, stime	Teoremi
Modo di verifica	Confronto con la realtà	Dimostrazione logica

Due lingue, due regole del gioco

Prendere sul serio le definizioni

I due linguaggi, quello umano e quello della matematica, utilizzano spesso le stesse parole. Ciò che cambia è il significato che gli attribuiamo.

La parola «sfera» è un ottimo esempio. Se vi dico che «la superficie della Terra è una sfera», capirete benissimo cosa voglio dire.

Se, come me, pensate che sia un'affermazione corretta, è perché interpretate la parola «sfera» nel linguaggio degli umani in modo percettivo e sfumato.

Nel linguaggio della matematica, l'affermazione diventa chiaramente falsa. Una sfera non può avere montagne.

In matematica, le parole sono definite in modo «assiomatico», cioè attraverso definizioni formali che le caratterizzano interamente. Sono costruzioni immaginarie, perfette e inalterabili: una sfera è «l'insieme dei punti di uno spazio di dimensione 3 che si trovano a uguale distanza da un centro». Non è consentito cambiare nulla. Se si rimuove un singolo punto o lo si sposta leggermente, smette di essere una sfera.

La cosa piú bizzarra è che la parola «sfera» ha esattamente la stessa definizione nei dizionari delle lingue umane. L'unica cosa che cambia è il nostro rapporto con questa definizione.

Nel linguaggio umano, nessuno prende mai sul serio le definizioni.

Nella vita reale, ciò che si chiama sfera è ciò che si percepisce come tale. Per dire che una forma è una sfera, si ha un certo margine di tolleranza. Un'arancia è una sfera, una mela è piú o meno una sfera, una pera non è una sfera. Vi sfido a descrivere i confini esatti del margine di tolleranza che è implicito nella vostra definizione percettiva di sfera.

Il procedimento scientifico

Funziona anche nell'altro senso. Si può prendere una parola del linguaggio umano e far finta di trattarla come una parola del linguaggio matematico. È ciò che facciamo ogni giorno quando ragioniamo.

Il processo è piuttosto sottile, ma sappiamo come farlo in maniera istintiva e inconscia. Consiste nel partire dal linguaggio degli umani, passare attraverso il linguaggio della matematica per fare un ragionamento e tornare al linguaggio degli umani. Lo facciamo ogni volta che formuliamo ipotesi e cerchiamo di giungere a delle conclusioni.

Questa attività quotidiana è una manifestazione concreta e intima di quello che piú pomposamente viene chiamato procedimento scientifico. Ecco una sintesi di questo procedimento attraverso un esempio, certo semplicistico, ma che ne illustra fedelmente tutte le fasi.

Se si afferma che, per definizione, un elefante è un «rappresentante di una delle tre specie *Loxodonta africana*, *Loxodonta cyclotis* ed *Elephas maximus*», se si assume che questa definizione dica la verità assoluta, diventa possibile trarre conclusioni logiche.

In effetti, le definizioni dei dizionari servono proprio a questo: sono modelli matematici che permettono di fissare il significato delle parole, temporaneamente, per il tempo necessario a fare un ragionamento.

Quando si vede un elefante che non è né un *Loxodonta africana* né un *Elephas maximus*, si può dedurre che si tratta di un *Loxodonta cyclotis*.

All'interno del vostro modello, questa deduzione è affidabile al 100%. Non c'è spazio per i dubbi. «È matematico», come si suol dire.

Ma questa deduzione è corretta nella vita reale? Tutto dipende dall'affidabilità del modello. Forse siete sfortunati e vi trovate di fronte a un rappresentante di una quarta specie di elefante, cosí rara da non essere stata ancora documentata.

Nel linguaggio degli esseri umani, nulla è mai affidabile al 100%. Abbiamo regolarmente delle sorprese. È per questo che una teoria scientifica fornisce sempre e solo predizioni, che possono essere convalidate dall'esperimento (la teoria acquista cosí credibilità) o smentite (dunque bisogna far evolvere il modello).

I modelli non sono mai buoni o cattivi di per sé. Dire che la superficie della Terra è una sfera è un modello abbastanza buono, purché non si cerchi di dedurre che le montagne non esistono. I successi della nostra tecnologia sono la prova che l'approccio scientifico è sano: anche se non produce verità *assolute*, la scienza fornisce un quadro di pensiero efficace e le sue previsioni sono abbastanza vicine alla realtà da essere di utilità pratica.

Usare correttamente la razionalità significa farla diventare una guida, non il giudice ultimo. La realtà che abbiamo davanti agli occhi merita sempre piú attenzione delle certezze che abbiamo in testa.

L'inclinazione a usare il linguaggio umano come se avesse le proprietà del linguaggio matematico, come se le parole avessero un significato preciso, come se ogni dettaglio fosse degno di essere interpretato, e come se la validità logica di un'argomentazione fosse sufficiente a garantire la

validità delle sue conclusioni, è un sintomo caratteristico di una malattia grave e ben nota: la paranoia.

Una ragnatela lacerata

La nostra dipendenza ancestrale dall'approccio matematico è certamente all'origine dei terribili malintesi che circondano la nozione di verità.

Quando parlo di «verità», mi riferisco alla verità dei matematici, alla verità assoluta ed eterna, quella che alcuni vogliono chiamare Verità, o VERITÀ, e a volte anche **VERITÀ**.

Questa verità è un concetto matematico. Esiste allo stesso modo del numero 5 e dei triangoli rettangoli. È probabilmente la prima invenzione della storia della matematica, quella che ha preceduto tutte le altre e che ha avuto il maggiore impatto sulla nostra cultura.

La parola «verità» ha naturalmente il suo equivalente nel linguaggio umano, cosí come la parola «sfera». Ma la versione umana è molto problematica. Come un frutto che mal sopporta il trasporto, la nozione di verità non sopravvive bene al processo di traduzione. Una sfera ammaccata sembra ancora una sfera, ma una verità ammaccata non assomiglia piú a niente.

Inoltre, non ci aspettiamo mai che le affermazioni del linguaggio umano siano «vere» in modo inesorabile e definitivo. Ci aspettiamo semplicemente che siano chiare, espressive, interessanti, oneste, sincere e che ci insegnino qualcosa di utile e rilevante sul mondo.

Quando diciamo che una cosa è «vera», è solo un'abbreviazione, un modo conveniente di riassumerla. Usiamo la definizione in modo indiretto perché altrimenti non avremmo occasione di utilizzarla.

Ciò non toglie che la situazione sia frustrante. Vorremmo che il mondo fosse piú stabile, piú chiaro. Vorremmo che le nostre verità fossero piú solide e meno dipendenti dal nostro punto di vista.

Questa osservazione del filosofo austriaco Ludwig Wittgenstein (1889-1951) riassume perfettamente la nostra frustrazione: «Quanto piú rigorosamente consideriamo il linguaggio effettivo, tanto piú forte diventa il conflitto tra esso e le nostre esigenze»[3].

La logica funziona solo quando le parole hanno una definizione esplicita, assolutamente precisa e stabile nel tempo. Nonostante i nostri

sforzi, non siamo in grado di produrre definizioni simili per le parole del linguaggio quotidiano. Wittgenstein sostiene che è una ricerca senza speranza: «È come se dovessimo aggiustare con le nostre dita una ragnatela lacerata».

Riconoscendo i limiti intrinseci del nostro linguaggio, Wittgenstein ha compiuto una delle piú grandi conquiste filosofiche del XX secolo. Egli rompe con una tradizione dominata per migliaia di anni dalla metafisica, in cui i filosofi credevano di poter usare la razionalità per affrontare problemi stranamente simili a quello dell'uovo e della gallina: problemi cosí scollegati dalla realtà quotidiana che il nostro linguaggio non aveva alcuna presa.

Il suo pensiero è sorprendentemente poco conosciuto dal grande pubblico, come se ci facesse sentire a disagio o ci offendesse. Eppure, porta un messaggio di buon senso e di modestia intellettuale: dobbiamo accettare di avanzare passo dopo passo, di chiarire il nostro linguaggio a mano a mano che procediamo e di sorprenderci regolarmente.

Tra le lezioni che avremmo dovuto imparare, una delle piú importanti riguarda l'insegnamento della matematica.

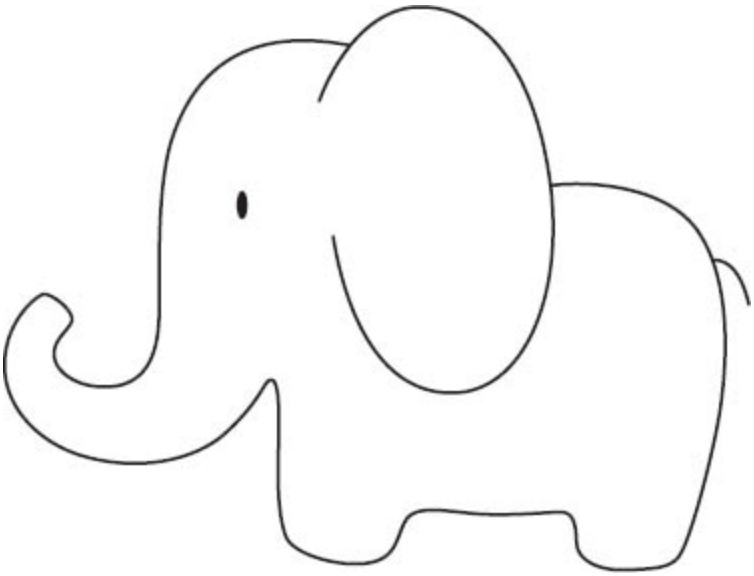
Continuiamo a insegnarla come duemila anni fa, come se da allora non fosse successo nulla e potessimo seriamente continuare a pretendere che si limiti alla sua versione ufficiale.

Se la matematica servisse solo a produrre verità eterne e avulse da qualsiasi realtà umana, non sarebbe di alcuna utilità.

Per capire che cos'è veramente, per scoprire il modo giusto di interagirvi e per apprezzare ciò che può davvero fare per noi, non possiamo piú ignorare il suo aspetto piú schiettamente pratico: la matematica agisce sul nostro cervello e cambia la nostra visione del mondo.

19. *Astratto e malleabile*

Conoscete questa illusione ottica? È una delle piú vecchie e famose:



Cosa vedete?

Guardate bene. Guardate con attenzione.

La maggior parte delle persone vede un elefante: immagino che stia accadendo anche a voi. Ma riuscite a vedere qualcos'altro?

Prendetevi il tempo necessario.

Provateci, datevi un'ultima *chance* prima di voltare pagina e leggere il resto.

La cosa straordinaria di questa illusione ottica è che ci vuole uno sforzo notevole per farla sparire. È quasi impossibile non vedere un elefante.

Eppure, se si guarda da vicino, si nota che non c'è nessun elefante, ma solo linee di inchiostro su una pagina.

Tra le linee di inchiostro e un elefante, la differenza è oggettivamente enorme. Quale misterioso fenomeno ci fa vedere un elefante dove ci sono solo linee?

Questo tipo di illusione visiva viene comunemente chiamata *disegno*. Un disegno, ovviamente, è molto piú di un'illusione. Un disegno ha uno stile, un messaggio, un valore artistico, un significato simbolico e culturale che non può essere ridotto a una semplice questione figurativa.

Eppure, se riconosciamo immediatamente i mammut dipinti nel Paleolitico da persone di cui non conosciamo la lingua, i costumi e le credenze, è perché nel disegno c'è qualcosa che sfugge a ogni convenzione culturale. Anche se non abbiamo i codici, riusciamo a capire il disegno. Il nostro cervello fa automaticamente il collegamento tra un animale *disegnato* e uno *reale*. In questo senso, i disegni sono vere e proprie illusioni visive.

La comprensione visiva dei disegni si sviluppa all'inizio della nostra esistenza. Non richiede un insegnamento specifico. I bambini capiscono le immagini prima di poter parlare. Le capiscono cosí bene che ci affidiamo ai disegni per insegnare loro il vocabolario. Se i disegni fossero solo convenzioni culturali, funzionerebbe al contrario: i bambini dovrebbero imparare prima il vocabolario per poter imparare a riconoscere i disegni.

Molti animali, mammiferi ma non solo, sono in grado di riconoscere oggetti disegnati senza che venga loro insegnato nulla. Interpretare i disegni non è un privilegio degli esseri umani.

C'è qualcosa di veramente straordinario nel fenomeno illusionistico che prende corpo attraverso il disegno.

Pensate a quante informazioni si possono trarre dal piccolo disegno che apre questo capitolo. L'elefante è giovane o vecchio? È pericoloso o innocuo? È arrabbiato? È molto sicuro di sé? Provate simpatia o diffidenza per lui?

Non avete mai seguito un corso di interpretazione dei disegni, eppure siete in grado di rispondere a queste domande istantaneamente e senza sforzo. Tutto questo da poche scarne righe su una pagina.

Com'è biologicamente possibile un tale prodigio?

La spiegazione che la scienza odierna è in grado di fornire ci aiuterà a comprendere la natura dei fenomeni di plasticità mentale descritti fin dall'inizio di questo libro.

L'enigma della visione

La visione è un fenomeno complesso che combina ottica, biochimica e neurologia. L'organo della visione non è costituito solo dall'occhio, ma anche dal nervo ottico e, soprattutto, dal cervello.

Capire a cosa servono i nostri occhi è abbastanza semplice: in pratica, sono delle macchine fotografiche. La metafora è semplice, persino riduttiva, ma è sensata e relativamente corretta. Naturalmente, ci sono ancora molte domande scientifiche irrisolte sui dettagli del funzionamento degli occhi, sul loro sviluppo nell'embrione e sul processo evolutivo attraverso il quale sono comparsi. Questi interrogativi sono leciti e richiedono risposte impegnative. Ma la quantità di conoscenze acquisite ha ridotto in gran parte le questioni avvolte dal mistero: l'occhio non è piú un enigma.

Il nervo ottico può essere visto come una sorta di cavo che collega l'occhio al cervello. Anche in questo caso, la metafora funziona perfettamente.

D'altro canto, è a valle del nervo ottico, ovvero ciò che accade all'interno della corteccia visiva, che troviamo un fenomeno molto affascinante, quello che ha posto una lunga resistenza ai nostri sforzi di comprensione. Si può dire che è stato uno dei piú grandi enigmi della storia della scienza.

L'immagine che esce da una fotocamera è composta da pixel: è una sorta di griglia, in cui ogni quadratino ha un determinato valore luminoso in rosso, verde e blu. La maniera in cui il nostro cervello elabora le informazioni grezze che arrivano attraverso il nervo ottico per estrarne il significato e «riconoscere» il contenuto dell'immagine rappresenta un enigma.

Il nostro cervello viene spesso paragonato a un computer ma, come vedremo, questa metafora non è corretta. Molto concretamente, l'enigma della visione può essere cosí riformulato: se si conoscono la luminosità e il colore dei diversi pixel, come si fa a sapere se c'è un elefante da qualche parte nell'immagine?

Il concetto di elefantitudine

La facilità con la quale riconosciamo gli elefanti è ancora piú inquietante perché, come abbiamo visto nel capitolo precedente, non siamo in grado di definire veramente cosa siano.

Non è una coincidenza. Vorremmo definire gli elefanti per come li percepiamo poiché questa per noi è la definizione piú sensata.

Il metodo utilizzato dal nostro cervello per riconoscere gli elefanti è straordinariamente efficace e allo stesso tempo assolutamente impossibile da spiegare a parole.

In effetti, è talmente efficace da risultare a malapena credibile.

Innanzitutto, la capacità di riconoscere un elefante non dipende dall'angolazione da cui lo si vede. Che l'elefante sia di faccia o di spalle, di lato o di tre quarti, in piedi o sdraiato, grande o piccolo, qualunque sia il suo movimento e il nostro movimento verso di lui, percepiamo la sua presenza in un attimo. Abbiamo anche un'incredibile tolleranza per una moltitudine di anomalie e tratti insoliti che l'elefante potrebbe avere. Se l'elefante è albino o dipinto con motivi geometrici e colori variegati, si vede comunque che è un elefante.

Da un punto di vista strettamente visivo, cioè dal punto di vista della luminosità e del colore dei pixel dell'immagine grezza, queste condizioni hanno poco a che fare l'una con l'altra.

C'è qualcosa di piú sorprendente. Quando un bambino, che non ha mai visto un elefante o non ne ha mai sentito parlare, si trova per la prima volta di fronte a un elefante vero, se gli indicate l'elefante e gli dite «quello è un elefante», capisce immediatamente cosa s'intende.

Tutto questo non è affatto scontato. Cosa impedisce al bambino di pensare che quello che chiamate *elefante* sia semplicemente la zampa anteriore sinistra, o la proboscide, o un pezzo della proboscide, o la mosca che si trova sulla proboscide?

Se il bambino capisce subito, è perché vede già l'elefante. Se n'è accorto subito, molto prima che gli diceste cos'era. L'elefante gli è saltato agli occhi come qualcosa di notevole e degno di un nome. Stava proprio per chiedervelo.

Senza questo fenomeno, il linguaggio non esisterebbe. Non saremmo in grado di spiegare a cosa si riferiscono le parole.

C’è qualcosa di ancora piú sorprendente. Se, invece di incontrare gli elefanti in carne e ossa, il bambino inizia a scoprirli nei disegni, non avrà problemi. Sarà perfettamente convinto di sapere cos’è un elefante. Il giorno in cui ne vedrà uno *reale*, sarà sorpreso dalle sue dimensioni e probabilmente un po’ spaventato, ma riconoscerà facilmente quell’animale che già conosce.

La conclusione è che il nostro cervello sembra estrarre automaticamente, dal flusso visivo grezzo che riceve continuamente attraverso il nervo ottico, un’idea universale di cosa sia un elefante. Questo *concetto astratto*[1] di elefante viene poi riconosciuto dal nostro cervello in cosí tante «incarnazioni» diverse, in cosí tante situazioni diverse che sarebbe assurdo cercare di elencarle tutte.

Senza sforzo e come per magia, sviluppiamo un robusto e potente «senso dell’elefantitudine» semplicemente esponendoci a scene che coinvolgono gli elefanti.

All’inizio di questo processo, l’elefante è solo una strana impressione che mescola qualcosa di familiare con qualcosa di estraneo. Possiamo vedere che si tratta di un animale, con un naso molto grande, zampe come tronchi d’albero e orecchie a ventaglio. Ma questo animale non assomiglia a nulla di conosciuto. Ci incuriosisce profondamente e siamo convinti che meriti un nome.

Il concetto di elefante emerge per la prima volta nella nostra corteccia visiva, sotto forma di questa sensazione sconcertante. Con l’osservazione, l’immaginazione e la verbalizzazione ripetute, si stabilizza e diventa piú chiaro. Alla fine del processo, gli elefanti sono diventati cosí naturali e ovvi che è come se li conoscessimo da sempre.

Che cos’è un concetto? Perché pensiamo attraverso concetti? A che livello di realtà esistono? Come si formano? Cosa ci rende capaci di percepirli?

Queste domande sono tra le piú antiche della storia della filosofia e per migliaia di anni sono state considerate irrisolvibili. Il loro vero soggetto è, ovviamente, l’intelligenza umana.

L’enigma della visione li riformula in modo sorprendentemente concreto. Questo lo rende il campo di studio perfetto per chiarire i meccanismi della nostra intelligenza.

Una metafora totalmente sbagliata

Il nostro cervello viene spesso paragonato a un computer. Questa metafora è corretta soltanto in due aspetti: sia il cervello che il computer sono in grado di svolgere compiti complessi di elaborazione delle informazioni e, in entrambi i casi, le informazioni si propagano sotto forma di impulsi elettrici.

Per il resto, la metafora è totalmente sbagliata. Rende impossibile la comprensione dei fenomeni che ci interessano.

Il computer è la perfetta incarnazione del Sistema 2: è una macchina in grado di applicare meccanicamente lunghe sequenze di istruzioni logiche a una velocità fenomenale e senza commettere errori, cosa che il nostro cervello non è in grado di fare.

Un computer è costituito da un'unità centrale in cui vengono eseguiti i calcoli e da varie unità di memoria in cui vengono conservate le informazioni. Tra queste unità, l'informazione scorre ad alta velocità lungo i circuiti elettrici, senza essere trasformata. Nel nostro cervello è vero proprio il contrario. L'informazione scorre lentamente, trasformandosi in ogni fase del suo percorso. Memoria, calcolo e percorso non sono separabili.

Un computer esegue le istruzioni una dopo l'altra, in sequenza, scandite da un orologio interno che batte diversi miliardi di volte al secondo. Il tempo necessario per l'attivazione di una connessione tra neuroni è invece nell'ordine di un millesimo di secondo. Le operazioni di base del nostro cervello sono quindi *un milione di volte* piú lente di quelle di un computer. Il nostro cervello, inoltre, non è sequenziale: esegue *miliardi e miliardi* di queste operazioni in parallelo.

I circuiti di silicio di un computer sono immutabili, incisi in un materiale inerte. Il nostro cervello è un tessuto vivente che si riconfigura costantemente.

Un sistema percettivo

Piuttosto che pensare al cervello come a un sistema computazionale, è molto piú corretto pensarlo come un sistema percettivo. Il nostro cervello è

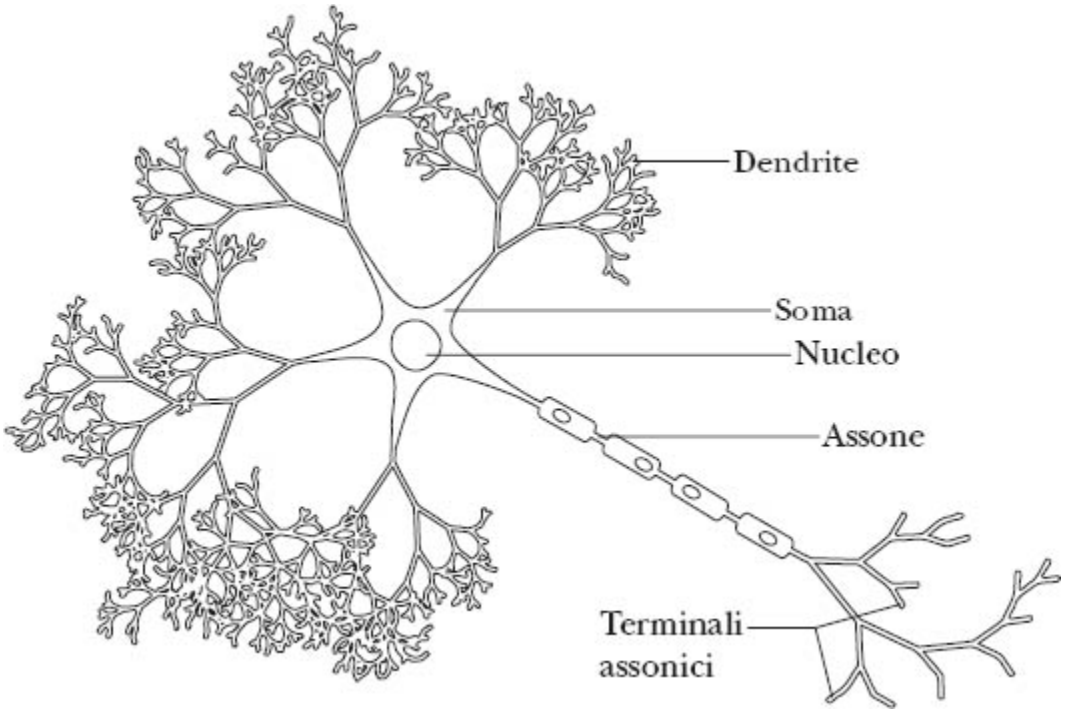
l’organo attraverso il quale percepiamo il mondo. Ci permette di percepire le cose, ad esempio di sentire che c’è un elefante di fronte a noi.

Ogni neurone del nostro cervello è un piccolo sistema percettivo a sé stante. Dal punto di vista anatomico, si compone di tre parti:

– Una struttura ad albero che si ramifica in migliaia di piccoli sensori, i *dendriti*. Questo è il lato «a monte» del neurone: è attraverso i dendriti che il neurone raccoglie le informazioni.

– Una parte centrale chiamata *soma*: è il «corpo» del neurone, che contiene il nucleo cellulare.

– Una sorta di tronco, l’*assone*, le cui ramificazioni finiscono nei cosiddetti *terminali assonici*. Questo è il lato «a valle» del neurone: è da qui che l’informazione «esce» dopo l’elaborazione per essere comunicata ad altri neuroni.



I neuroni sono connessi l’uno all’altro in un modo specifico: i terminali assonici di un neurone servono come «prese» alle quali i dendriti di altri neuroni possono «connettersi» per ricevere informazioni da quel neurone. Le connessioni cosí formate sono chiamate *sinapsi*.

L’informazione contenuta in un neurone è il suo stato. Può essere a riposo oppure può essere eccitato, vale a dire percorso da un impulso

elettrico che si trasmette fino alle terminazioni, dove si attiva il rilascio di molecole chiamate *neurotrasmettitori*.

Sono questi neurotrasmettitori che, quando vengono rilevati dai dendriti dei neuroni a valle delle sinapsi, li informano sullo stato di eccitazione del neurone a monte.

Per decidere se rimanere a riposo o attivare un impulso, un neurone esegue una sorta di sondaggio dei suoi dendriti. Se un numero sufficiente di dendriti rileva impulsi dai neuroni a monte, il neurone decide di attivare a sua volta un impulso, che trasmette, attraverso le sinapsi, ai dendriti dei neuroni a valle.

In breve, un neurone percepisce il mondo solo attraverso lo stato di eccitazione dei neuroni a monte. Se un numero sufficiente di neuroni a monte è eccitato (attivo), reagisce e si attiva a sua volta. In caso contrario, rimane a riposo.

Tutto qui.

Una proprietà emergente

La prima volta che mi hanno spiegato come funzionano i neuroni, la cosa non mi interessava affatto. Sentivo che non si arrivava a niente. Se i nostri neuroni sono cosí primitivi, come possiamo essere intelligenti?

I meccanismi della nostra intelligenza sono impossibili da comprendere finché cerchiamo di localizzarla in un luogo specifico del nostro cervello. L'intelligenza è ciò che chiamiamo *proprietà emergente*: individualmente, i nostri neuroni sono primitivi e ottusi, ma collettivamente, gli assemblaggi di un gran numero di neuroni «emergono» con comportamenti incredibilmente sofisticati che non possono essere attribuiti a un neurone piuttosto che a un altro. Su larga scala, questi comportamenti vengono chiamati *intelligenza*.

È un po' come per gli ingorghi: finché si studiano le automobili una per una, non si possono capire gli ingorghi, eppure gli ingorghi esistono e sono tutti fatti di automobili.

Esiste un'enorme differenza tra il comportamento individuale dei nostri neuroni e il funzionamento complessivo del nostro cervello. Per molto tempo, questa differenza ci è sembrata cosí grande che abbiamo fortemente dubitato di riuscire a capirci qualcosa.

Non è piú cosí. L’enigma della visione è stato ormai risolto in larga misura.

La neurologia, da parte sua, ha permesso di chiarire come sono disposti i neuroni. È diventato inoltre possibile monitorare l’attività di singoli neuroni o di specifiche regioni cerebrali in tempo reale, nell’uomo e negli animali. Tuttavia, questo approccio ha i suoi limiti: sebbene la risoluzione spaziale e temporale degli strumenti di *imaging* cerebrale abbia fatto enormi progressi, siamo ancora molto lontani, ad esempio, dal riuscire a tracciare simultaneamente tutti i neuroni coinvolti nell’individuazione di un elefante – e ancora di piú dal seguire questi neuroni durante l’intero processo di apprendimento, nel corso di una vita.

La svolta piú straordinaria e convincente in questo campo è arrivata da un’altra disciplina: l’informatica. Fin dagli anni Cinquanta, psicologi e informatici hanno cercato di trarre ispirazione dal funzionamento dei nostri neuroni e dall’anatomia della nostra corteccia cerebrale per costruire sistemi di *intelligenza artificiale*. Poiché questi sistemi simulano l’architettura del nostro cervello, il loro comportamento ci permette di capire i fenomeni che si verificano nella nostra testa.

Frank Rosenblatt (1928-1971), uno dei pionieri di questo approccio, è stato il creatore della prima modellizzazione matematica e informatica di un neurone isolato. Mentre, il comportamento di reti complesse in grado di simulare la nostra capacità di vedere restava ancora da modellizzare. La tecnologia al riguardo ha fatto modesti progressi per decenni attraversando fasi di entusiasmo e disillusione. Tre scienziati, Geoffrey Hinton, Yann LeCun e Yoshua Bengio, hanno continuato a crederci e la storia ha dato loro ragione.

Alla fine degli anni Duemila, i loro algoritmi di *deep learning* erano progrediti a tal punto da essere in grado di risolvere problemi avanzati nel riconoscimento delle immagini, come il rilevamento della presenza di elefanti.

La giusta metafora

Intorno al 2010, quando ho iniziato a familiarizzare con questi algoritmi, mi sono entusiasmato scoprendo un modo di descrivere il processo di comprensione che, per la prima volta, era coerente con le mie sensazioni.

La plasticità mentale, l'inevitabile ambiguità del linguaggio umano, il ruolo del tempo e del procedere a tentoni nel percorso di scoperta e sistematizzazione, l'impressione di evidenza che si esprime a posteriori: tutti questi fenomeni potenti e misteriosi che mi avevano incuriosito per tanto tempo, e dei quali ho parlato fin dall'inizio di questo libro, sono diventati improvvisamente tangibili e concreti.

È diventato possibile parlarne senza dover invocare chissà quale magia nera.

L'argomento mi affascinava a tal punto che ho deciso di porre fine alla mia carriera di matematico. Avevo appena concluso un importante periodo di ricerca in algebra e geometria e ho visto l'opportunità di esplorare un tema radicalmente nuovo che avrebbe fatto luce su ciò che avevo sperimentato.

Ho scelto di affrontarlo nel modo piú pratico possibile, fondando un'azienda di intelligenza artificiale e abbandonando cosí la carriera accademica.

A mio avviso, gli algoritmi di *deep learning* forniscono la metafora migliore per comprendere la natura della nostra intelligenza e i meccanismi del nostro pensiero.

Il neurone dell'elefante

Il primo enigma che gli algoritmi di *deep learning* possono risolvere è quello della formazione dei concetti. In altre parole, quello che per millenni è stato uno dei dibattiti piú accesi della metafisica è diventato improvvisamente un fenomeno concreto e sostanziale, documentato da una realtà sperimentale inequivocabile: il pensiero concettuale emerge spontaneamente da un grande insieme di neuroni sottoposti a dati grezzi, ad esempio un flusso di immagini.

Con molta approssimazione, ecco come funziona. Gli algoritmi di *deep learning* prendono a modello la nostra corteccia, intesa come una rete composta da diversi strati di neuroni. Il primo strato è l'immagine grezza: una griglia di neuroni che rappresentano i pixel. Il secondo strato è costituito da neuroni i cui dendriti sono collegati ai neuroni del primo strato. Il terzo strato è costituito da neuroni i cui dendriti sono collegati ai neuroni del secondo strato. E cosí via. È proprio perché questa rete è composta da

diversi strati sovrapposti che questo tipo di apprendimento viene chiamato «profondo».

Nella descrizione del meccanismo che decide dell'eccitazione di un neurone, ho omesso un dettaglio di una certa importanza: il sondaggio dei dendriti fatto da un neurone per decidere se eccitarsi o meno è un sondaggio *ponderato*. In altre parole, ogni connessione di un neurone con uno dei neuroni dello strato a monte ha un certo «coefficiente» che determina la sua parte discrezionale nella decisione di eccitarsi o meno.

Sottoposta a un flusso di immagini grezze, la rete aggiusta gradualmente i coefficienti di tutte le connessioni tra i neuroni, secondo un meccanismo che spiegheremo tra qualche pagina.

È attraverso questo processo di regolazione e aggiustamento dei coefficienti che la rete «impara» e «diventa intelligente».

Quando si lascia girare un algoritmo di *deep learning* di questo tipo, ad esempio facendolo «apprendere» tramite milioni e milioni di fotografie recuperate a caso da internet, si può notare che ogni neurone si specializzerà gradualmente nell'individuazione di un determinato «concetto».

I concetti dei primi strati saranno molto primitivi, quelli degli strati piú profondi saranno molto piú sofisticati.

Ad esempio, un neurone del secondo strato può essere specializzato nel rilevamento di una linea verticale nell'angolo in basso a sinistra dell'immagine o di un leggero gradiente di luminosità in un'altra regione dell'immagine. Si eccita solo in presenza di questa funzione.

Nel terzo strato, i concetti saranno leggermente piú sofisticati. Ad esempio, un certo neurone potrebbe rilevare determinati tipi di angoli tra due segmenti situati in una certa area dell'immagine.

A mano a mano che si procede negli strati della rete di connessioni, i concetti diventano piú sofisticati e capaci di livelli sempre piú alti di astrazione. Diventano sempre piú «profondi».

Nel quinto strato, alcuni neuroni potrebbero, ad esempio, essere specializzati nel rilevamento di triangoli o di alcuni tipi di curve.

Nel ventesimo strato, un neurone potrebbe essere specializzato nell'individuazione di elefanti, reali o disegnati. Questo modo di esporre la questione è volutamente semplicistico. La realtà è ovviamente piú complessa di cosí, sia dal punto di vista computazionale sia da quello biologico.

Dire che nel vostro cervello il concetto di elefante corrisponde a un neurone specifico è una scorciatoia. Non è una scorciatoia del tutto corretta, ma è abbastanza corretta da poter essere utilizzata. È una modalità molto illuminante di rappresentare le cose.

La questione non è del tutto chiara da un punto di vista biologico. Alcuni esperimenti suggeriscono, ad esempio, che per ogni attore o attrice famosa che conoscete, avete davvero un neurone specifico che risponde in modo particolare alla loro presenza in un'immagine[2]. Tuttavia, alcuni scienziati ritengono che i concetti corrispondano a gruppi di neuroni, piuttosto che a singoli neuroni. Nelle simulazioni al computer, si può osservare che alcuni singoli neuroni sono specializzati nel rilevamento di oggetti complessi come gli elefanti; in altri casi, questo rilevamento può essere ottenuto attivando un piccolo gruppo di neuroni (piuttosto che un singolo neurone).

Queste sfumature non hanno alcun impatto sulle conclusioni che trarremo nel resto del libro.

Facciamo quindi finta di avere effettivamente un neurone dell'elefante. Questo ci permetterà di raccontare le cose in modo semplice, intuitivo e, perlopiú, corretto.

Centomila miliardi di filamenti

Il neurone dell'elefante ha migliaia di dendriti. La vostra definizione intima di elefante implica quindi migliaia di criteri, che sono essi stessi concetti astratti di alto livello, come «è un animale», «ha una proboscide», «ha grandi orecchie», «è grigio», «è grasso», «barrisce», «ha zanne d'avorio», «ha la pelle ruvida», «si muove in un certo modo», e cosí via.

Ciascuno di questi criteri ha una propria ponderazione. È probabile che «ha una proboscide» abbia un coefficiente elevato. In ogni momento, il «neurone dell'elefante» calcola un «punteggio di elefantitudine» sommando i coefficienti dei criteri i cui neuroni sono attivati.

Non appena questo punteggio supera una certa soglia, decide che si tratta di un elefante. Al di sotto di questa soglia, c'è prima un'area grigia in cui non si è sicuri che si tratti di un elefante (e dove qualcun altro potrebbe avere un'opinione diversa), e poi un'area in cui, chiaramente, non c'è nessun elefante.

È il gran numero di criteri coinvolti a rendere il sistema di rilevamento degli elefanti cosí affidabile ed efficace. Il vostro punteggio di elefantitudine è sufficientemente ben campionato, può essere pertinente in un'ampia varietà di situazioni e tollerare un'ampia varietà di anomalie.

La definizione esatta è ovviamente impossibile da scrivere. Non basterebbe un libro intero, e comunque non si troverebbero mai le parole giuste.

La ragnatela di cui parlava Wittgenstein era proprio questa: il groviglio dei nostri centomila miliardi di connessioni neuronali. È impensabile volerlo districare e, senza riuscire a farlo, non c'è alcuna reale possibilità di definire qualsiasi cosa.

Gli algoritmi di *deep learning*[3], anche quelli piú potenti e sofisticati, non sono che grossolane semplificazioni dell'architettura del nostro cervello. La nostra corteccia visiva è realmente strutturata a strati, ma non in modo cosí rigoroso come nei modelli informatici: il neurone «elefante» sonda lo stato del neurone «proboscide», ma il neurone «proboscide» sonda certamente lo stato del neurone «elefante». È impossibile sfuggire alla circolarità delle definizioni.

È una semplificazione anche immaginare che il nostro cervello sia organizzato in aree specializzate impermeabili l'una all'altra: la nostra definizione di elefante non è solo visiva.

Come onde dell'oceano

Resta da descrivere il processo di apprendimento in sé: quale meccanismo utilizzano i neuroni per aggiornare i «coefficienti» delle loro connessioni con i neuroni a monte?

Prendiamo l'esempio del neurone «elefante»: analizza continuamente lo stato dei neuroni a monte per decidere se attivarsi o meno. È grazie a questo comportamento che è possibile analizzare il mondo in tempo reale. Parlare di tempo reale è sempre improprio, perché nessun sistema funziona davvero in tempo reale. Un neurone impiega circa mezzo millisecondo per reagire.

Nel capitolo 11 abbiamo definito questo aspetto come *Sistema 1*: il pensiero intuitivo «istantaneo», quello che ci fa sentire come se stessimo pensando alla velocità della luce.

Parallelamente, si verifica un altro fenomeno, molto piú discreto e impossibile da percepire direttamente. Si svolge su una scala temporale molto piú lenta. La metafora giusta non è piú quella della luce, ma di un processo di crescita organica, come quella di una pianta. Questo è il nostro processo di apprendimento. È all'origine di quello che abbiamo chiamato *Sistema 3*: la nostra capacità di cambiare gradualmente il modo in cui ci rappresentiamo il mondo.

Se un giorno vi capitasse di incontrare un elefante senza proboscide, rimarreste sorpresi.

Cosa significa «rimanere sorpresi»? Significa che la vostra visione del mondo non lo prevedeva. Tuttavia, questo non vi impedirà di capire. Sicuramente vedrete ancora che si tratta di un elefante, ma avrete la netta sensazione che ci sia qualcosa che non va.

Quando modellizziamo matematicamente un sistema di *deep learning*, possiamo definire una grandezza numerica che misura la sua «perplessità» di fronte a una determinata situazione. Un sistema di apprendimento è un sistema che regola i suoi coefficienti per ridurre la perplessità.

Intuitivamente, ecco a cosa equivale. Nel vostro punteggio di elefantitudine, «avere una proboscide» ha un coefficiente elevato. Anche se gli altri neuroni a monte permettono di compensare e di «vedere» l'elefante nonostante l'assenza della proboscide, si tratta di una situazione anomala e la avvertite fisicamente, che ne siate consapevoli o meno.

Il neurone «elefante» ne terrà conto e diminuirà il coefficiente associato. Se continuate a vedere elefanti senza proboscide, alla fine ignorerete quasi completamente questo criterio.

In realtà non c'è bisogno di anomalie cosí grossolane perché i neuroni correggano i loro coefficienti di ponderazione. Li aggiustano continuamente, in modo molto leggero, a ogni stimolo. Fisiologicamente, ciò corrisponde alla capacità delle connessioni sinaptiche di rafforzarsi o indebolirsi. Si creano nuove connessioni, altre scompaiono. I nostri circuiti mentali vengono cosí costantemente riconfigurati.

La vostra plasticità mentale non è nient'altro che questo: l'approccio decentrato dei vostri neuroni che, individualmente, cercano di rafforzare la coerenza del loro punteggio.

La cosa piú straordinaria – ma perfettamente dimostrata a livello sperimentale grazie agli algoritmi di *deep learning* – è che tali semplici meccanismi permettono a concetti astratti e di alto livello, come quello di

elefante, di emergere gradualmente da uno stato iniziale in cui le connessioni e i coefficienti sono scelti a caso.

Non siete nati con un neurone elefante. La prima volta che avete visto un elefante, la vostra perplessità era molto forte: il vostro neurone «animale» era eccitato, cosí come il neurone «cosa enorme che merita la mia attenzione» e i molti altri neuroni corrispondenti ai molteplici attributi che potevate riconoscere. Ma questa impressione forte e complessa non aveva un nome. Avete guardato con attenzione, per assorbire e imparare.

Nella vostra mente, l'elefante era inizialmente solo un oggetto composito che coinvolgeva un gran numero di neuroni tra i cento miliardi presenti nel vostro cervello. Uno dei neuroni eccitati dal primo incontro con un elefante ha avuto un destino particolare. A poco a poco, attraverso il graduale adattamento delle sue connessioni, si è specializzato nel riconoscimento di questi animali. Non importa a cosa reagisse quel neurone all'inizio. Ora è diventato il vostro neurone dell'elefante.

I concetti si formano quindi nelle reti profonde per il semplice effetto dell'esposizione al mondo, proprio come le onde dell'oceano si formano per la semplice azione del vento: per l'amplificazione di piccole irregolarità sulla superficie dell'acqua, secondo leggi fisiche molto semplici da descrivere a livello microscopico e che, su scala piú ampia, danno origine a fenomeni emergenti molto piú complessi.

Astratto e malleabile

Le implicazioni scientifiche, tecnologiche e filosofiche di tutto ciò vanno ben oltre lo scopo di questo libro. Per le esigenze della nostra storia, ecco il riassunto che potremmo farne.

Il nostro cervello, come quello di tutti gli animali, è una macchina percettiva che crea costantemente astrazioni. Costruiamo e manteniamo una rappresentazione del mondo che si materializza dal groviglio delle nostre connessioni neuronali. Questa rappresentazione del mondo è una sovrapposizione di astrazioni successive. A un livello molto profondo, è di natura concettuale.

Il pensiero concettuale non è un privilegio umano. Non è un'emanazione della nostra lingua o della nostra cultura. Sto usando la parola «pensiero» in un senso molto ampio, per riferirmi ai processi

neurologici che costituiscono il substrato della nostra intelligenza. Qualsiasi leone pensa concettualmente e nella sua testa ha un neurone dell'elefante.

La fragilità del nostro linguaggio è solo un riflesso delle sue basi neurologiche. Il significato che attribuiamo alle parole è percettivo: possiamo riconoscere un elefante, ma non possiamo mai definire veramente cosa sia.

Qualsiasi definizione è un'approssimazione. Il significato delle parole è sempre vago, ambiguo e mutevole. Nella nostra testa, il mondo è astratto e malleabile.

20. *Il risveglio matematico*

Nel corso della mia avventura matematica, nonostante il gusto per la materia e il piacere che mi dava, ho avuto l'impressione che il vero problema fosse altrove.

Ciò che contava davvero per me, ciò che mi motivava e mi spingeva a continuare, non erano i teoremi che potevo dimostrare e che avrebbero interessato solo pochi specialisti, ma un'altra cosa, molto piú profonda e universale.

Quest'altro aspetto mi è sembrato di importanza cruciale. Ci riguardava tutti, a livello intimo. Aveva a che fare con le problematiche umane del processo di comprensione. Non sapevo ancora come chiamarlo, né cosa fosse.

Ho provato quella sensazione familiare ai matematici creativi: l'impressione che ci fosse qualcosa di strano, di poco chiaro e definito, di non ben spiegato, senza sapere di preciso cosa fosse ma vedendo piú o meno quale direzione prendere per indagare.

La ricerca matematica mi è sembrata il modo migliore per affrontarlo. Ero come un esploratore che parte alla scoperta di un continente selvaggio, a malapena indicato sulle carte geografiche, senza sapere veramente cosa troverà, ma perfettamente consapevole che in realtà sta partendo per scoprire sé stesso.

Questo libro è la storia della mia avventura. L'ho vissuta per poterla raccontare.

Questa cosa che all'epoca mi sembrava cosí strana e poco chiara, oggi credo di poterla spiegare a parole. È il tema dell'ultimo capitolo.

Il linguaggio dell'universo

Quando ero un dottorando e mi chiedevano in che cosa potesse essere utile il mio ambito di ricerca, rispondevo in genere con una *boutade*: «Sarà utile nella fisica tra mille anni».

A quel tempo ero molto scettico sulle applicazioni pratiche della ricerca matematica contemporanea. Gli ultimi vent'anni mi hanno fatto cambiare idea.

Tutti gli oggetti tecnologici che vi passano per le mani, tutti i protocolli per la comunicazione, l'elaborazione delle informazioni e l'automazione, si basano su strati di astrazioni matematiche. Il processo di digitalizzazione del mondo e delle nostre vite ha aumentato drasticamente il ruolo già centrale della matematica nella scienza e nella tecnologia. Ogni giorno vengono scoperte nuove e insospettabili applicazioni. Ciò vale anche per la cosiddetta matematica «pura», come l'algebra e la geometria, che per lungo tempo sono state considerate «inutili».

Non c'è alcun dubbio: la matematica è tecnologicamente utile. Lo è già in misura straordinaria e continua a esserlo ogni giorno di piú.

Eppure, nella lunga storia dell'umanità, la matematizzazione del mondo da parte della scienza e della tecnologia è un fenomeno recente. Si fa risalire a Cartesio e prima di lui a Galileo, del quale resta una celebre affermazione: il «libro» dell'universo era «scritto in linguaggio matematico».

Prima del XVII secolo, la scienza non era matematizzata. La matematica non aveva, per cosí dire, applicazioni.

Al liceo e all'università, viene spesso presentata come uno strumento utile per la scienza, ma profondamente inumano e privo di valore in sé. Questo modo di raccontare le cose rende la matematica e la sua storia totalmente incomprensibili.

Come hanno fatto i matematici a scoprire il linguaggio dell'universo?

La matematica è caduta dal cielo, come per miracolo?

Cosa può aver motivato il suo sviluppo durante tutti i millenni in cui era comunque inutile?

Come potevano i filosofi greci conoscere il linguaggio dell'universo, senza rendersene conto e facendone un prerequisito per lo studio della filosofia?

Vedere e pensare il mondo

Quando la matematica ci viene presentata come uno strumento esterno a noi, imperioso e freddo, ci risulta estranea e tale rimane per sempre. È algida, crudele, impossibile da amare e desiderare.

I matematici non la vivono cosí.

In questo libro ho raccontato il modo in cui ho usato l'intuizione per progredire in matematica. O almeno è quello che immaginavo di fare all'inizio, quando ancora pensavo che ciò che contava fosse la matematica ufficiale, quella dei libri.

Maturando, mi sono reso conto che funzionava anche al contrario. Usavo la matematica per far progredire la mia intuizione.

La vera sfida della matematica è la comprensione umana. Al di là delle applicazioni tecnologiche che basterebbero a rendercela indispensabile, la matematica ha un secondo uso, nascosto, molto piú profondo e potente.

Con i giusti esercizi di immaginazione, abbiamo la capacità di svilupparne una comprensione intuitiva e familiare. Possiamo farla nostra e renderla un'estensione del nostro corpo.

La vera matematica estende la nostra comprensione intuitiva del mondo che ci circonda.

Avete già accesso a questa matematica interiore. È possibile manipolare un cerchio con la mente. Sentite la presenza del numero 999 999 999 proprio lí davanti a voi. Quando osservate il mondo, riconoscete i numeri e le figure geometriche.

Nella vostra testa, i concetti matematici si comportano in modo diverso dagli altri concetti. Sono molto piú difficili da imparare, ma una volta al loro posto, diventano molto piú chiari e stabili.

Questo è il potere incompreso della verità matematica e del formalismo logico: sono strumenti che ci permettono di costruire immagini mentali di incomparabile chiarezza.

Da bambini avete imparato che cos'è un elefante. Poi avete imparato che esistono due tipi diversi di elefanti e che si possono distinguere in base alle dimensioni delle orecchie. Ora sapete che esistono almeno tre tipi di elefanti.

Questo tipo di esperienza non vi accadrà mai con il numero 2. Il ruolo della verità matematica è quello di collegare tra loro i concetti matematici per formare una griglia mentale di grande coerenza e stabilità. È difficile spiegare cosa sia realmente il numero 2, ma si sa che $2 + 2 = 4$ e che non può essere diversamente.

L’intuizione matematica non è mai perfetta. La logica e la verità matematica permettono di affinarla, ricalibrarla e farla crescere nel corso di tutta una vita.

Anche se pensate di essere negati per la matematica, la griglia concettuale che la matematica reale ha già formato nella vostra testa è il punto fermo piú saldo della vostra visione del mondo. Senza i numeri, senza i tondi e i quadrati, senza il concetto di spazio tridimensionale, senza il concetto di punto e di traiettoria, senza le coordinate cartesiane, senza i concetti di distanza, velocità e accelerazione, senza l’idea che una linea retta possa essere estesa all’infinito, senza il concetto di probabilità, senza le addizioni e le moltiplicazioni, senza il concetto di calcolo, senza il concetto di verità e di ragionamento logico, il mondo che vi circonda diventerebbe improvvisamente cosí sfocato e instabile che vi sembrerebbe di essere stati lobotomizzati.

La matematica che siete in grado di capire espande la realtà e aggiunge un magico strato di intelligibilità. Vi rende superlucidi.

Con il tempo, è diventata cosí concreta e palese, cosí «reale», che al confronto l’altra matematica, quella che ancora non capite, vi sembra astratta, assurda, «immaginaria».

Eppure, questi concetti, cosí ovvi e cosí profondamente radicati, non hanno sempre fatto parte dello scenario. È difficile da credere, ma cose cosí sciocche come i numeri interi richiedevano davvero che qualcuno li andasse a cercare, con la forza del pensiero, ai limiti della comprensione umana. Li hanno sentiti nascere per la prima volta nella nebbia delle loro intuizioni. Poi hanno lottato per trovare le parole. Hanno lavorato per rendere queste parole semplici e accessibili, finché alla fine tutti le hanno trovate chiare.

Nella testa dei matematici di oggi c’è mille volte di piú di quello che vi è stato insegnato.

La matematica non è il linguaggio dell’universo. È il linguaggio che ci permette di parlare con chiarezza e precisione di cose astratte che non possiamo indicare. È il linguaggio che ci permette di ragionare e fare scienza. È il linguaggio che ci ha reso ciò che siamo, nel bene e nel male.

Questo approccio alla matematica come tecnica di riprogrammazione mentale e di estensione della percezione umana è piuttosto recente. Era una visione che, almeno fino a poco tempo fa, era nell’aria senza che nessuno si preoccupasse di chiarirla e renderla accessibile al grande pubblico.

Thurston lo sottolinea con determinazione in un bellissimo testo di tre pagine scritto nel 2010; eccone un estratto: «Spesso immaginiamo che la matematica si occupi della ricerca di verità universali, di modelli che non sono agganciati ad alcun contesto specifico. Ma a un livello piú profondo, lo scopo della matematica è quello di sviluppare modi migliori, per gli *esseri umani*, di vedere e pensare il mondo. La matematica è un'avventura che ci trasforma, dove i progressi si misurano soprattutto nei cambiamenti del nostro modo di pensare e non nelle verità esterne che scopriamo»[1].

Il processo di comprensione

Resta ancora da affrontare un punto cruciale, forse il piú importante del libro.

La cosa davvero strana e poco chiara che mi ha turbato durante la mia esplorazione della matematica non era, ovviamente, a cosa servisse.

Chi si pone questa domanda non fa matematica. Chi fa matematica, invece, sa benissimo che serve a qualcosa, se non altro a dargli piacere, a offrirgli quella magica sensazione di vedere il mondo rischiararsi con il procedere del ragionamento.

Quando ci rendiamo conto che la vera sfida della matematica è la comprensione umana, rimane un enorme enigma da risolvere: cosa rende la matematica cosí difficile da condividere e perché è inaccessibile a cosí tante persone?

Se conoscessimo la risposta, non ci sarebbero le persone che non capiscono nulla di matematica.

L'aspetto piú confuso del processo matematico è il costante riferimento a cose che non esistono «nella vita reale» e che dobbiamo ancora trovare il modo di immaginare.

Il consiglio piú semplice e basilare per chi vuole capire la matematica, che ho ripetuto in tutto il libro, è quello di far finta che queste cose siano lí, proprio davanti a noi, e che si possano toccare.

Essere negati in matematica è fondamentalmente una forma di incredulità: è rifiutarsi di credere che immaginare cose che non esistono possa essere di una qualche utilità.

Ammetto che è sconcertante, ma l'unico modo per dare un senso alla matematica è immaginare che le cose di cui parla esistano davvero.

Grothendieck lo esprime meravigliosamente bene in questo passo già citato: «Per tutta la vita non sono riuscito a leggere un testo matematico, per quanto banale o elementare, perché non ero in grado di dargli un “senso” nei termini di una personale esperienza delle cose matematiche, ovvero quando questo testo non mi suscita immagini mentali, intuizioni che gli diano vita»[2].

Come abbiamo visto, non c’è nulla di grandioso o sofisticato in queste immagini mentali. Sono sempre sciocche, elementari. Quando un matematico immagina una sfera, la immagina piú o meno come la immaginate voi.

I matematici sono esseri umani. Possono comprendere gli oggetti matematici solo in modo percettivo, attraverso interpretazioni umane *false*, delle approssimazioni, delle traduzioni del vocabolario matematico nel linguaggio degli umani.

È in questo modo che la matematica esercita il suo effetto benefico: arricchisce il nostro vocabolario *umano* e la nostra percezione *umana*.

D’altra parte, un matematico ha sempre presente che la sua immagine mentale è solo un’approssimazione della verità e cerca continuamente di scoprire in quali modi essa possa essere falsa.

La sfera reale esiste «altrove», in una sorta di mondo parallelo. Se questo mondo parallelo esista davvero è un dibattito sterile, perché è comunque inaccessibile. Alcuni matematici sono convinti che esista, altri sono convinti che non esista e altri ancora, come me, se ne infischiano totalmente.

L’unica cosa che conta (e sconcerta davvero) è che è indispensabile fare «come se» questo mondo parallelo esistesse, perché senza di esso la matematica non è altro che una serie di segni indecifrabili su un foglio di carta.

Questo spiega l’insistenza dei matematici nel parlare di *oggetti matematici* per designare quelle che i piú chiamano *astrazioni matematiche*.

In altre parole, da un punto di vista puramente pratico, la matematica è indistinguibile da una finzione.

L’apprendimento della matematica è un’attività puramente immaginativa. La facciamo entrare nella nostra testa con la forza del pensiero e la teniamo insieme con la forza coesiva di un ingrediente misterioso, che è in un certo senso il protagonista della *fiction* e il suo punto focale: la verità matematica.

Di tutte le nozioni matematiche, la verità è allo stesso tempo la piú semplice e la piú difficile da spiegare. Se si vuole spiegare il numero 2, si possono mostrare due arance. Se si vuole spiegare cos'è un triangolo, si può mostrare un triangolo. Ma se si vuole spiegare qual è la verità dei matematici, cosa si può mostrare?

Grazie a questa finzione, i matematici sviluppano nuove modalità di approccio alla realtà e nuovi modi di pensare che, nel corso della storia, hanno dimostrato la loro potenza e la loro fecondità.

Gli oggetti della finzione diventano, attraverso la loro incarnazione concreta e intuitiva, nuovi concetti che arricchiscono la nostra comprensione del mondo. È come se uscissero dalla finzione per diventare «reali», incarnati, come il numero 2 che si materializza davanti ai nostri occhi quando vediamo due arance.

In questo processo di ritorno al reale, tutti gli oggetti matematici perdono la loro perfezione ma conservano l'essenziale delle caratteristiche che li hanno resi interessanti nella finzione. Un'arancia può non essere una vera e propria sfera, ma è comunque rotonda.

Tutti tranne uno: il personaggio centrale rimane come bloccato nella finzione. Nel mondo reale, nulla è mai vero nel senso in cui lo intendono i matematici.

Nel momento in cui il sogno si dissolve, la verità matematica appare improvvisamente, come un genio che rientra nella bottiglia.

Un amico immaginario

Sono talmente abituato a questo approccio che non lo trovo nemmeno piú strano.

Eppure, quando cerco di guardarlo dall'esterno, sono costretto ad ammettere che è strano. Non conosco nessun'altra attività umana che funzioni con un cosí forte contrasto tra il reale e l'immaginario. Visto da questa prospettiva, l'intero approccio sembra del tutto fumoso.

È un po' come se i matematici conversassero con un amico immaginario che gli rivela dei segreti sul mondo che ci circonda. È difficile capire come una cosa del genere possa avere la minima possibilità di funzionare.

Questi continui fraintendimenti su ciò che è immaginario e ciò che non lo è hanno inquinato la comprensione della matematica nel corso della sua

storia.

Ci sono, naturalmente, i cosiddetti numeri «immaginari», che non sono né piú né meno immaginari dei cosiddetti numeri «reali», che non sono né piú né meno reali dei cosiddetti numeri «razionali».

Ogni introduzione di un nuovo tipo di numero ha provocato un grande disagio non solo tra il pubblico, ma anche tra gli stessi matematici, compresi quelli che questi nuovi numeri li avevano introdotti.

Nel XIX secolo c'erano ancora matematici seri che sostenevano che i numeri negativi non erano altro che chimere. Nel XV e XVI secolo, i loro promotori li chiamavano *numeri assurdi*. Da allora, la realtà stessa sembra essersi alterata. Questi numeri considerati assurdi sono diventati concreti ed evidenti. Hanno invaso la nostra vita quotidiana. Per capire che i numeri negativi non sono solo una fantasia, basta aprire un conto corrente.

Cantor fu definito un «ciarlatano», un «rinnegato» e un «corruttore della gioventú» per essere riuscito a parlare con calma e precisione dell'infinito. In sostanza, è stato criticato per aver reso tangibile ciò che avrebbe dovuto rimanere evanescente. Dal punto di vista della teologia, la matematica è una concorrente sleale.

«L'essenza della matematica è la sua libertà» disse Cantor. La libertà dei matematici è quella di trattare le cose «immaginarie» come cose «reali», purché siano «vere». A forza di farlo, finiscono addirittura per trovarle «concrete».

Si è dimostrato che questo approccio funziona a meraviglia. Naturalmente, i matematici non intendono fermarsi qui. Continua a divertirli il carattere soprannaturale o miracoloso delle loro costruzioni. Plasmano «modelli assoluti», «sequenze d'insieme degli autovalori di un'applicazione lineare», «funtori "dimenticanti"». Studiano un oggetto misterioso chiamato il *Mostro*, che vive nella dimensione 196 883. In algebra esiste una particolare dimostrazione chiamata *truffa di Eilenberg*.

Una cosa davvero strana

Il processo di comprensione della matematica è di per sé strano. Ma il processo di scoperta e di creazione lo è ancor di piú. L'esperienza è cosí particolare e spiazzante che è difficile parlarne senza sembrare un pazzo.

Uno degli aspetti piú sconcertanti è il modo brusco in cui le idee nascono, senza sforzo e quasi sempre all'improvviso. Sono «come chiamate dal nulla», per usare una frase di Grothendieck.

In una ricerca molto seria di Bob Thomason e Tom Trobaugh[3], veniamo a sapere che il contributo del secondo autore (che era già morto) è stato solo l'apparire in sogno al primo autore per indicargli la soluzione.

Un mio caro amico, un eccellente matematico di cui non farò il nome, mi ha recentemente confessato di aver avuto la netta impressione – senza mai osare raccontarla – che le piú grandi idee della sua carriera gli fossero state suggerite direttamente da Dio (sebbene sia un ateo convinto).

Io, per esempio, non ho mai provato nulla del genere. Piú semplicemente, ho avuto l'impressione di poter levitare e di poter passare attraverso i muri.

La cosa davvero strana è stata questa. Piú progredivo, piú mi addentravo nella matematica, piú imparavo a padroneggiare le tecniche che permettono di capire bene e di diventare creativi, e piú il tutto sembrava alchimia e magia nera.

Cartesio pensava che i matematici proteggessero i loro segreti per evitare che gli fossero rubati. La spiegazione è probabilmente piú banale: avevano solo paura di essere considerati pazzi.

Finché non sono diventato uno di loro, avrei potuto credere che fossero semidei in grado di parlare il linguaggio dell'universo.

Ma sapevo che non era vero. Sapevo da dove venivo. Ho visto cosa ha provocato dentro di me il fare progressi nella comprensione della matematica. Ogni tappa importante è sempre stata la scoperta, piú o meno fortuita, di una nuova tecnica per superare le inibizioni o di un nuovo modo per far funzionare l'immaginazione.

In pratica, la matematica ha poco a che fare con le scienze esatte. Dovrebbe piuttosto essere associata alla psicologia, di cui è una sorta di sottobranca esoterica e applicata.

La creazione matematica produce una sensazione magica e soprannaturale. È innegabile. Ma, dietro a tutto questo, c'è per forza di cose una realtà umana che non è né soprannaturale né magica.

Ciò che mi ha veramente turbato, e che mi ha spinto a continuare a esplorare questi argomenti fino a quando non mi sono sentito in grado di raccontarli in modo semplice, è stata la sensazione che stessimo perdendo una grande occasione.

Nessun progetto umano ha il prestigio, la legittimità e l'autorità intellettuale del progetto matematico. Se i matematici non sono in grado di spiegare il loro percorso senza dare l'impressione che si tratti di un rituale sciamanico, non significa che questa impressione sia esatta.

Significa solo che stanno usando le parole sbagliate e che gli manca qualcosa di essenziale.

Il giusto modo di muovere le mani

Perché l'insegnamento della matematica è cosí disfunzionale, a tutti i livelli e da cosí tanto tempo? Perché i processi creativi sono cosí fortemente «irrazionali»? Perché è cosí difficile raccontare e condividere l'esperienza della comprensione della matematica?

Ho studiato matematica perché non capivo la maniera in cui fosse possibile comprenderla. Mi aspettavo che qualcuno mi spiegasse *perché* era possibile e *come* farlo. La spiegazione non è mai arrivata. L'argomento non è neppure stato affrontato.

Questo non mi ha impedito di imparare da solo, per i fatti miei. Come molti altri, ho sperimentato la frustrazione di dover tenere nascosta la parte della matematica che per me era piú preziosa.

Ogni volta che mi sono trovato nella condizione di insegnare o di spiegare il mio lavoro, ho cercato di intrecciare due livelli di discorso: un livello formale fatto di definizioni rigorose e di enunciati precisi, e un livello intuitivo, con le giuste metafore, i giusti disegni, le giuste inflessioni della voce, il giusto modo di muovere le mani.

Questi due livelli si completano a vicenda. Il discorso formale senza un perché esplicito e senza condivisione dell'intuizione è, a modo suo, una forma di abuso. Ma un discorso puramente intuitivo senza formalizzazione è un'altra forma di abuso: qui sta il limite della divulgazione matematica. Non appena la matematica ufficiale viene messa da parte, l'intuizione perde i suoi punti fissi. È un'illusione voler insegnare la matematica cercando di evitare il formalismo. Senza definizioni formali non c'è matematica, ci sono solo persone che parlano a vanvera.

Poco prima di lasciare il mondo accademico, ho avuto la possibilità di tenere il corso piú interessante della mia carriera. Si trattava di un corso

introduttivo alla matematica per gli studenti di lettere e filosofia dell'École normale supérieure.

L'ho vista come un'opportunità per affrontare di petto la domanda che mi assillava da tempo: si può insegnare l'arte di accogliere la matematica nella nostra mente?

Mi sono rituffato in quelli che tradizionalmente vengono chiamati i *fondamenti* della matematica, la logica formale e la teoria degli insiemi. È stato allora che mi sono reso conto che, fino a quel momento, li avevo intesi in modo sbagliato. Non sono *fondamenti* della matematica, ma *branche* della matematica, che hanno la loro importanza storica e concettuale, ma che non sono affatto rilevanti per capire cos'è la matematica, né tanto meno per insegnarla.

Alcune delle idee e degli esempi contenuti in questo libro possono essere ricondotti direttamente agli appunti delle mie lezioni di allora. Tuttavia, mi mancava un elemento fondamentale.

Nel mio corso, ho avuto la sensazione di non riuscire a portare la conversazione dove volevo. Era come se stessi mancando il bersaglio. Adoravo come vivevo la matematica nella mia dimensione intima, ma non ero in grado di spiegarla con parole comprensibili agli altri.

È in tale contesto che ho chiuso con la mia carriera scientifica. Decisioni come questa non sono mai facili da prendere. Cercare di trovare un unico fattore esplicativo sarebbe ingenuo. Tuttavia, tra i vari fattori, c'era questa frustrazione: non riuscivo a insegnare la matematica in un modo che avesse senso per me. Avevo l'impressione di trovarmi di fronte a un muro, a un tabú di cui io stesso ero attore e prigioniero.

Ero certo che i miei appunti sarebbero diventati un giorno un libro, ma non mi sentivo in grado di scriverlo. Sentivo piuttosto il bisogno di fare un passo indietro, di imparare altre cose, di incontrare altre persone, di scoprire altri modi di vivere e di approcciarsi al mondo.

Il racconto impossibile

Gli *Elementi* di Euclide, uno dei piú antichi trattati di matematica formale, risale a 2 300 anni fa. Da allora, la matematica è stata proposta come la scienza della deduzione logica. L'altra parte della storia, i gesti invisibili che facciamo nella mente, è rimasta nascosta.

Fino a dieci anni fa, non avevamo un modo soddisfacente di illustrare adeguatamente il funzionamento dell'intelligenza umana.

In sostanza, l'unico modello che avevamo era quello del ragionamento meccanico deduttivo. Questo modello esiste fin dall'antichità. La metafora è quella del *calcolo*. La parola deriva dal latino *calculus*, che significa «sassolino», in riferimento ai piccoli sassolini utilizzati nell'abaco dell'epoca. Nel corso dei secoli, la metafora si è concretizzata in vari oggetti materiali: prima gli abachi, poi le macchine a ingranaggi e ora i microprocessori. Tale metafora è diventata gradualmente sinonimo di matematica e razionalità, anzi dell'intelligenza stessa.

Questo profondo malinteso ci ha reso incapaci di mettere in relazione la matematica con l'esperienza umana comune.

Chiaramente, abbiamo sempre saputo che la nostra intelligenza non si riduceva a questo. Sapevamo che c'era qualcos'altro, qualcosa di misterioso che chiamavamo *spirito*, *intuizione*, *terzo occhio* o *sesto senso*, qualcosa che non riuscivamo a evocare senza ricorrere al linguaggio del paranormale.

Gli unici modelli che avevamo erano entità magiche e soprannaturali che agivano fuori dal nostro controllo, con le quali solo una piccola élite, dotata di un dono speciale, aveva il privilegio di entrare in comunicazione. Questi modelli non si erano praticamente evoluti dalla preistoria.

Lo stesso linguaggio era per noi un mistero. Chi ha inventato le parole? Come siamo riusciti a capire il significato delle frasi? Qual è la natura dei concetti? Queste domande sono state a malapena affrontate dalla scienza. Appartenevano al campo della metafisica e della teologia.

Eppure, la matematica è soprattutto una questione di plasticità mentale. Capire la matematica significa riprogrammare l'intuizione. Le tecniche segrete dei matematici non sono né piú né meno paranormali di quelle che hanno permesso a Ben Underwood di vedere il mondo emettendo dei clic con la lingua.

Finché la nostra attività mentale sembrava di natura magica, la matematica era intrinsecamente impossibile da spiegare.

L'incontro con gli algoritmi di *deep learning* mi ha permesso di scrivere questo libro. Mi hanno dato fiducia nel valore della mia testimonianza e mi hanno permesso di associare la mia esperienza soggettiva a cose abbastanza «razionali» da poter essere raccontate al di là dell'ambito della conversazione privata.

L’ingrediente mancante nel mio corso introduttivo alla matematica era la narrazione dell’esperienza umana. Se la comprensione umana è la vera sfida della matematica, allora i meccanismi di tale comprensione devono far parte dell’insegnamento. Questo aspetto dell’umano non può essere un argomento satellite trattato in modo informale e aneddotico.

Per millenni, tuttavia, questa narrazione è stata impossibile. Né la metafora del calcolo né quella della magia potevano essere usate per affrontarla con calma.

Quando interpreto, nel contesto del *deep learning*, gli strani fenomeni che riguardano la comprensione matematica, questi cessano di essere tali. Sí, come ho già detto, le idee nascono inaspettatamente, «come se fossero chiamate dal nulla», e questo è normale. Sí, la plasticità è un meccanismo impercettibile, lento, che si manifesta liberamente e senza sforzo, non appena siamo esposti alle immagini giuste. Sí, la chiave è costringersi a immaginare le cose *anche quando non le capiamo ancora*, un’operazione che pochi si permettono di fare. Sí, prestare attenzione ai piccoli dettagli che ci confondono è di fondamentale importanza. (La tecnica del dubbio cartesiano è di per sé molto simile alle tecniche «antagonistiche» utilizzate per accelerare la convergenza degli algoritmi di apprendimento.)

I concetti nella nostra mente non sono entità soprannaturali provenienti da un mondo parallelo, ma rappresentazioni mentali costruite dal nostro cervello. Queste rappresentazioni sono il frutto del processo di apprendimento neurale che ci permette di interpretare il mondo e di «vederlo».

I concetti matematici in esso racchiusi non sono né piú né meno astratti, né piú né meno reali di altri concetti. L’unica differenza è che vi sono entrati con uno sforzo di immaginazione e non con l’osservazione diretta del mondo fisico. È in questo senso – e solo in questo senso – che sono immaginari. Una volta compresi, i concetti matematici diventano evidenti come gli elefanti.

Il risveglio matematico

Per migliaia di anni, il modo in cui la matematica è stata raccontata l’ha resa incomprensibile alla maggior parte delle persone. Ora abbiamo l’opportunità di raccontarla in modo diverso.

L’apprendimento della matematica dovrebbe essere un’abilità psicomotoria come un’altra, accessibile al maggior numero di persone possibile, proprio come imparare a nuotare o ad andare in bicicletta. Tuttavia, le nostre false credenze sulla natura del linguaggio e sul funzionamento dei nostri pensieri ostacolano questo insegnamento semplice e diretto. Bloccano i gesti che permettono l’apprendimento.

Come si fa a insegnare la matematica a chi crede che l’intuizione e la percezione della realtà siano delle informazioni fisse, impossibili da riprogrammare? La faccenda diventa difficile come insegnare a nuotare a chi è convinto che il suo corpo sia pesante come la pietra e che quindi affonderà.

Il presupposto per il successo dell’insegnamento è la messa in discussione di queste false credenze. Ecco perché ho concepito questo libro come un libro di risveglio e di emancipazione. Proprio come la matematica in sé, racconta del nostro corpo, di come funziona e di ciò che possiamo fare con esso.

Ho cercato di parlare con tutta la calma possibile di quello che ci accade in testa. La realtà umana concreta, l’esperienza soggettiva, l’esperienza fisica e sensoriale, l’aspetto pratico, ciò che si fa *realmente*, come funziona e perché funziona: tutto questo non ha mai fatto parte dell’insegnamento.

Ma ovviamente è proprio qui che ci si gioca tutto. Ci sono tecniche che funzionano e altre che non funzionano. Ci sono anche tecniche che funzionano in modo strepitoso.

Non ho alcun dubbio sul fatto che i matematici creativi non siano biologicamente diversi, ma che abbiano semplicemente trovato un modo per «sbloccare» modi potenti e nascosti di usare il cervello umano, senza rendersene conto e senza riuscire a condividerli effettivamente.

Questo è stato il presupposto che mi ha guidato durante la stesura del libro. Mi sono concentrato su ciò che capivo, e quindi su una piccola parte dell’argomento.

Ho avuto la fortuna di poter attingere alle storie di Cartesio, Grothendieck e Thurston. Le loro storie sono molto simili, come se fossero la stessa raccontata da tre punti di vista differenti. Queste storie sono coerenti per quanto riguarda la mia esperienza diretta e ciò mi ha permesso di collocare la mia storia personale in una tradizione piú antica, piú potente e piú ampiamente documentata.

Quei grandi matematici non hanno tutte le chiavi. Cartesio può spiegare ciò che gli succede solo ipotizzando che la sua mente sia di natura divina e immateriale, staccata dal corpo. Grothendieck è convinto che Dio gli sussurri all'orecchio e sogni nella sua testa. Thurston è il piú moderno dei tre, il piú pragmatico e senza dubbio il piú lucido.

La loro onestà intellettuale e attenzione per i dettagli sono preziose. Ci raccontano cosa pensano di aver provato e cosa ha contato nel loro successo.

Dalla prima all'ultima pagina, le loro testimonianze riguardano quasi esclusivamente l'immaginazione. Ognuno di loro descrive l'uso dell'immaginazione secondo modalità nuove, scoperte per caso e in contrasto con quanto gli era stato insegnato.

Grothendieck attribuisce la singolarità della sua opera alla trasgressione di un tabú: «Sembrerebbe che tra tutte le scienze naturali, solo in matematica quello che ho chiamato "il sogno", o "il sogno della veglia", sia soggetto a un divieto apparentemente assoluto, vecchio di oltre due millenni».

Thurston lo dice in un modo piú modesto ma altrettanto potente, ancora piú espressivo nell'originale inglese: «I have decided that daydreaming is not a bug but a feature» («Ho deciso che sognare a occhi aperti non è un difetto ma una funzionalità»).

La chiave di tutta la faccenda è chiaramente la nostra immaginazione. Per millenni abbiamo frainteso la sua natura e il suo ruolo e, di conseguenza, non siamo in grado di prenderla sul serio.

L'immaginazione non è un'attività parassitaria che bisogna reprimere, come un tempo era repressa la masturbazione. Al contrario, è l'attività centrale che rende possibile il nostro sviluppo intellettuale.

Fino a poco tempo fa, pensavamo di poter immaginare tutto ciò che volevamo, nel modo in cui volevamo, senza che questo avesse il minimo impatto sulla realtà. Ma ciò che vediamo e facciamo *nella nostra testa* contribuisce all'apprendimento neuronale tanto quanto ciò che vediamo e facciamo *nella vita reale*.

La nostra capacità immaginativa plasma la nostra percezione della realtà. Ma nessuno ci ha mai detto come fare. Ci sono mille modi di immaginare. Non abbiamo imparato a riconoscerli, tanto meno a dargli un nome. «Pensare», «meditare», «riflettere», «visualizzare», «analizzare», «fantasticare», «ragionare», «sognare a occhi aperti»: usiamo queste parole

un po’ a casaccio, senza sapere bene cosa significhino e senza ponderare quanto abbiano in comune. È in questa vaghezza che nascono tutti i malintesi.

Ma tutto ciò è molto piú di una vaghezza: è un buco buio e profondo, una totale *impasse* della nostra cultura e della nostra educazione.

Le nostre modalità di immaginazione decidono il nostro destino. Alcune ci rendono stupidi. Altre ci fanno impazzire. Altre ancora hanno il potere di farci diventare straordinariamente intelligenti.

Le tecniche dei matematici sono tra le piú potenti che esistano. Facciamole uscire dalla loro dimensione segreta.

Epilogo

All’inizio del 1913, Godfrey Harold Hardy, un importante matematico dell’Università di Cambridge, in Inghilterra, ricevette una strana lettera da Madras, in India.

L’autore era uno sconosciuto di nome Srinivasa Ramanujan. Sosteneva di essere un piccolo impiegato di ventitré anni[1] che viveva in povertà, senza un’istruzione superiore, e che dedicava il tempo libero allo studio solitario della matematica. La lettera era accompagnata da una selezione di teoremi che diceva di aver dimostrato e che i matematici locali avevano trovato «sorprendenti». Voleva che Hardy gli desse un parere.

Hardy gli diede una rapida occhiata. All’inizio pensò che si trattasse di uno scherzo. Tuttavia, sfogliando il manoscritto, la sua perplessità non fece che aumentare. I risultati non solo sembravano credibili, ma la loro profondità e novità erano in realtà straordinarie e Hardy si sentí completamente sopraffatto.

I teoremi erano forniti senza dimostrazione. Hardy stesso non era in grado di dimostrarli. Eppure, si disse che «devono essere veri perché, se non lo fossero, nessuno avrebbe la fantasia per inventarli».

Da quel momento in poi gli fu chiaro: Ramanujan era un matematico di una classe eccezionale che sarebbe passato alla storia insieme ai piú grandi.

Formalismo e intuizione

La storia dell’incontro e dell’amicizia tra Hardy e Ramanujan è talmente inverosimile che potrebbe essere tratta da una *fiction*.

Può essere letta come una favola sociale. All’apice del dominio coloniale britannico, due mondi entrano in collisione. Hardy è un puro

prodotto dell’arroganza intellettuale occidentale, un membro dei circoli piú elitari, comodamente insediato nella propria torre d’avorio. Ramanujan, invece, è un matematico dilettante e autodidatta, figlio di un venditore di sari.

Hardy lo invitò a Cambridge, dove Ramanujan rimase per cinque anni, dal 1914 al 1919, finché non si ammalò gravemente e decise di tornare in India, dove morí l’anno successivo all’età di trentadue anni.

Alla fine della sua carriera, quando a Hardy fu chiesto quale fosse il suo piú grande contributo alla matematica, rispose senza esitazione: «la scoperta di Ramanujan».

C’era di che essere orgogliosi. Hardy riconobbe immediatamente lo straordinario genio di Ramanujan. Ebbe il coraggio e l’integrità di agire di conseguenza, anche quando ciò significava sfidare le norme consolidate. Ramanujan fu cosí il primo indiano a essere eletto *fellow* del Trinity College e uno dei piú giovani *fellows* della Royal Society.

A un secondo livello, la storia può essere letta anche come una favola matematica. Riprende i temi principali che abbiamo trattato ed è l’epilogo perfetto.

Fin dall’inizio di questo libro abbiamo raccontato come la matematica si nutra della tensione tra due forze contraddittorie: la freddezza inumana del

formalismo logico e la potenza fenomenale dell'intuizione. Tutto il lavoro matematico, che si tratti della comprensione di un esercizio scolastico o della ricerca ai limiti della conoscenza umana, comporta un dialogo costante tra formalismo e intuizione.

Non tutti vedono questo dialogo dalla stessa prospettiva. Alcuni matematici sono piú spontaneamente «formalisti», altri piú profondamente «intuitivi». Tutti sanno che, per andare avanti, devono tendere la mano all'altra parte.

Il duo esplosivo di Hardy e Ramanujan è ancora piú affascinante perché entrambi sono incarnazioni perfette, quasi caricature, di una o dell'altra polarità.

Hardy è stato uno dei matematici piú famosi del suo tempo e uno dei grandi artefici della rivoluzione formalista che ha unificato la matematica e consolidato la nozione di dimostrazione all'inizio del XX secolo.

Era un amico intimo di Bertrand Russell, coautore (con Alfred North Whitehead) del libro piú inumano della storia del pensiero: *Principia Mathematica*[2]. In uno stile ultraformalista che sfiora il delirio, questo grande trattato sulla teoria degli insiemi (il cui titolo è ripreso dal grande trattato di Newton) dà alla visione iniziale di Cantor fondamenti assiomatici che ne permettono il consolidamento, e dimostra, tra l'altro, che la nozione di numero può essere ricostruita a partire dalla nozione di insieme.

Quest'opera monumentale ha cambiato il volto della matematica. Concepita per essere eterna, è stata purtroppo sfigurata da un brutto difetto alla nascita: è completamente indecifrabile da qualsiasi persona normale. Se state cercando la prova che 1 + 1 = 2, la troverete a pagina 379.

Quando i *Principia Mathematica* furono pubblicati, Hardy stesso ne scrisse una recensione[3] per il grande pubblico sul supplemento letterario del *Times*, con il suo caratteristico umorismo britannico: «I lettori non matematici potrebbero essere naturalmente spaventati nel sopravvalutare la difficoltà tecnica del libro».

Quanto a Ramanujan, è il matematico piú fenomenale della storia in fatto di capacità intuitive. È difficile parlare di lui senza ricorrere a superlativi, perché il nostro vocabolario è inadeguato. Anche la parola «genio» sembra troppo riduttiva.

Il suo stile di lavoro era al di là di ogni comprensione. Si limitava a scrivere formule su fogli di carta con sopra la parola «teorema», senza dare alcuna spiegazione del suo modo di procedere.

Quando Hardy insistette sulla necessità di scrivere prove rigorose, Ramanujan rispose che non ne vedeva l'utilità. Sapeva che le sue formule dicevano la verità, poiché la divinità di famiglia, Namagiri Thayar, gliele aveva rivelate in sogno.

$*54{\cdot}42.\quad \vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[$*24{\cdot}53{\cdot}56.*51{\cdot}161$] $\quad \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha \qquad (1)$

$\vdash . *54{\cdot}25 . \mathrm{Transp} . *52{\cdot}22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

[$*13{\cdot}12$] $\quad \supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y :$

[$*51{\cdot}235$] $\quad \equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

[$*37{\cdot}6$] $\quad \equiv : \beta \in \iota``\alpha \qquad (3)$

$\vdash . (3) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . *54{\cdot}101 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

[$*51{\cdot}231$] $\quad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

[$*13{\cdot}12$] $\quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

$*54{\cdot}44.\quad \vdash :. z, w \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv . \phi(x, x) . \phi(x, y) . \phi(y, x) . \phi(y, y)$

Dem.

$\vdash . *51{\cdot}234 . *11{\cdot}62 . \supset \vdash :. z, w \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :$

$z \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_z . \phi(z, x) . \phi(z, y) :$

[$*51{\cdot}234.*10{\cdot}29$] $\equiv : \phi(x, x) . \phi(x, y) . \phi(y, x) . \phi(y, y) :. \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*54{\cdot}441.\quad \vdash :: z, w \in \iota`x \cup \iota`y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :. x = y : \vee : \phi(x, y) . \phi(y, x)$

Dem.

$\vdash . *5{\cdot}6 . \supset \vdash :: z, w \in \iota`x \cup \iota`y . z \neq w . \supset_{z,w} . \phi(z, w) : \equiv :.$

$z, w \in \iota`x \cup \iota`y . \supset_{z,w} : z = w . \vee . \phi(z, w) :.$

[$*54{\cdot}44$] $\quad \equiv : x = x . \vee . \phi(x, x) : x = y . \vee . \phi(x, y) :$

$$y = x \,.\vee.\, \phi(y,x) : y = y \,.\vee.\, \phi(y,y) :$$

$$[*13{\cdot}15 \qquad \equiv : x = y \,.\vee.\, \phi(x,y) : y = x \,.\vee.\, \phi(y,x) :$$

$$[*13{\cdot}16.*4{\cdot}41] \equiv : x = y \,.\vee.\, \phi(x,y) \,.\, \phi(y,x)$$

This proposition is used in $*163{\cdot}42$, in the theory of relations of mutually exclusive relations.

Sarebbe stato bellissimo essere invisibili per vedere la faccia di Hardy, ateo convinto e fervente razionalista, quando Ramanujan gli disse queste cose.

Nella sua breve carriera, Ramanujan ha prodotto oltre 3 900 «risultati». Quale status dovrebbero avere? Normalmente, un teorema senza dimostrazione non è un teorema. È solo una congettura. Sia come sia, questa è la versione ufficiale.

A un secolo dalla sua morte, il bilancio è straordinario. Quasi tutte le formule si sono rivelate corrette. La ricerca di dimostrazioni ha ispirato lo sviluppo di intere aree della matematica e ha richiesto l'invenzione di nuovi e sofisticati strumenti concettuali. Questo lavoro ha coinvolto matematici di primo piano per decenni e decenni. Stiamo appena iniziando a vederne la fine.

Come ha fatto Ramanujan a scoprire le sue formule? Il modo in cui le vedeva non era forse l'inizio di una dimostrazione, o magari una dimostrazione completa ma non verbale? Veramente non aveva alcun mezzo per dire di piú senza invocare la sua dea?

Sotto l'influenza di Hardy, Ramanujan riuscí comunque a padroneggiare i rudimenti della matematica «accademica». Discusse una tesi e scrisse alcuni articoli che contenevano dimostrazioni reali. Tuttavia, non fu mai in grado di spiegare il suo metodo di lavoro. Se fosse vissuto piú a lungo, forse alla fine avrebbe trovato un modo per raccontare meglio le immagini, i colori o le strutture, i sapori o le consistenze che gli si formavano nella mente e il modo in cui aveva imparato ad avvalersene[4].

Se voleste davvero credere nella magia o nell'esistenza di superuomini con poteri soprannaturali, la storia di Ramanujan potrebbe ispirarvi.

Sono d'accordo con Misha Gromov[5], uno dei piú grandi matematici viventi (ha ricevuto il premio Abel nel 2009), secondo il quale sarebbe un errore attribuire il genio di Ramanujan a una sorta di anomalia, una singolarità scollegata dalla comune esperienza umana: «Il miracolo di

Ramanujan punta con decisione agli stessi principi universali che permettono a miliardi di bambini di imparare la loro lingua madre».

Sospetto che l'affermazione di Gromov sia dettata dalla sua personale esperienza, dalla sua intima comprensione dei meccanismi della propria creatività, che di per sé è abbastanza miracolosa.

Mentre ci avviciniamo alla fine di questo libro, spero che un'osservazione come quella di Gromov non vi sorprenda piú, e anzi vi sembri del tutto naturale.

Qualcuno come te e come me

Nell'articolo in cui Hardy commenta il *Principia Mathematica*, nascosto dietro il suo umorismo britannico si può scorgere un aspetto meno simpatico della sua personalità: il suo elitarismo patologico.

L'articolo si rivolge all'ampio pubblico dei lettori del *Times* e tratta un argomento che può mettere in soggezione: un libro di 666 pagine (questo è solo il primo volume, ce ne saranno tre) con un titolo in latino (il libro stesso è scritto in una lingua impossibile da determinare), che pretende di essere un nuovo punto di partenza per la logica, la matematica e il pensiero umano.

Hardy insiste sul significato filosofico del libro e sul suo carattere storico, con un tono scherzoso che suggerisce come si sia divertito a immergersi al suo interno.

Pur ammettendo che «il tono generale è matematico» e che «sarebbe sciocco fingere che il libro non sia difficile», invita i non specialisti a non farsi scoraggiare, arrivando a dire che «alcune battute sono davvero ottime».

In nessun momento rivela la chiave dell'enigma, il consiglio cruciale che mi ha dato il mio amico Raphaël e che ho condiviso nel capitolo 6. Di fronte ai *Principia Mathematica*, questo consiglio diventa un imperativo per la propria salute mentale: «Non bisogna mai leggere libri di matematica».

Per Hardy, la matematica è una sorta di club privato in cui possono entrare solo gli iniziati. Nella sua celebre autobiografia, *Apologia di un matematico*[6], un testo che è stato a lungo un punto di riferimento e che oggi colpisce per il suo egoismo e la sua acredine, arriva a lanciare questo

terribile anatema: «Non c’è disprezzo piú profondo, o piú giustificabile, di quello che provano gli uomini verso gli uomini che spiegano».

Molto si potrebbe dire sulla lunghissima tradizione dell’elitarismo dei matematici.

Nel mondo accademico, un matematico costruisce la propria carriera e la propria legittimità sulla base dei nuovi teoremi che riesce a dimostrare, niente di piú. Il resto non conta, se non per le rare congetture che diventano famose di per sé e conferiscono un particolare prestigio.

Il sistema ha i suoi vantaggi. Riduce la quantità di arbitrarietà e aiuta la matematica a proteggersi dall’autocompiacimento e dall’autoreferenzialità. Quando una disciplina si occupa di verità eterne, questo sistema semplifica la valutazione delle carriere.

Ha anche i suoi punti ciechi. Per Hardy, il commento e la spiegazione sono attività «per menti di secondo piano». Fortunatamente, la comunità matematica ha fatto molta strada su questi temi. Ha imparato a non essere cosí sprezzante nei confronti dell’insegnamento e della divulgazione. Tuttavia, la strada da percorrere è ancora lunga.

La matematica segreta, quella che ha a che fare con la comprensione umana, non avrà mai il rigore e l’obiettività della matematica ufficiale. In quanto tale, non è ancora considerato un argomento «serio».

Questo argomento «non serio», tuttavia, mi sembra molto piú scottante della maggior parte delle questioni matematiche.

Riguarda coloro che, prima o poi, si confrontano con l’apprendimento della matematica: in altre parole, tutti. Appassiona gli stessi matematici e spesso alimenta le loro conversazioni. Solleva domande fondamentali sull’intelligenza umana, sul nostro linguaggio e sul funzionamento del nostro cervello.

Sarebbe un vero peccato relegarlo dietro le quinte della scienza, nelle conversazioni private e nelle autobiografie dei matematici in pensione. Sarebbe allo stesso modo un peccato esiliarlo dal campo della matematica e abbandonarlo alla neurologia.

Non vedere che questo argomento è al centro della questione matematica significa fraintendere la natura stessa della matematica.

Senza dubbio, fino a poco tempo fa, non avevamo gli strumenti né il quadro di riferimento per affrontare il tema in modo costruttivo. Eravamo collettivamente bloccati nel fatalismo e nella passività: «Alcune persone sulla Terra sono mostruosamente brillanti in matematica, ma non ha senso

cercare di capire perché, è solo un miracolo, un dono del cielo. E tanto peggio per chi non lo capisce».

Questo tema «non serio» ma scottante è l'oggetto di questo libro. Ho cercato di affrontarlo con i miei mezzi, procedendo da un punto di partenza molto semplice: raccontare la matematica come l'ho vissuta, nel modo piú facile possibile – in cosa consiste *realmente*, cosa si fa nella propria testa, come si procede nella *pratica*.

Se Hardy fosse stato in grado di porre a Ramanujan le domande giuste, forse avremmo potuto imparare cose meravigliose. Fortunatamente, abbiamo le testimonianze di Cartesio, Grothendieck, Thurston e, naturalmente, di Einstein.

Questi scritti hanno un valore inestimabile. Il loro messaggio piú inquietante, potente e sovversivo è questo: costruiamo la nostra intelligenza matematica da soli, con i nostri mezzi umani ordinari, con la nostra immaginazione, la nostra curiosità e sincerità.

Grothendieck scrisse: «L'uomo che per primo scoprí e utilizzò il fuoco era una persona esattamente come te e come me. Non era affatto quello che noi consideriamo un "eroe", un "semidio" e via dicendo».

Con parole differenti, Cartesio e Einstein dicono essenzialmente la stessa cosa. Mentre eravamo impegnati a mettere i loro crani nei musei e a tagliare i loro cervelli a fettine, non ci siamo nemmeno preoccupati di ascoltarli.

Cosa fare di tutto questo?

Ho scritto questo libro come un libro-amico, un libro che avrei voluto avere al mio fianco durante gli studi per guidarmi, incoraggiarmi e allontanare le mie inibizioni. Credo che mi avrebbe aiutato molto. Spero che sia di aiuto a voi.

Il mio obiettivo non è quello di rendere la matematica facile. Non lo sarà mai, per nessuno. Non ha questa vocazione. Vorrei semplicemente renderla *accessibile*, vale a dire permettere a tutti coloro che lo desiderano di impadronirsene, secondo il loro desiderio e la loro ambizione.

Ci saranno sempre persone molto piú forti di altre, visionari, appassionati, avventurieri. Ma sostenere che l'accesso alla matematica richieda un dono speciale è una bugia. La matematica è una nostra proprietà

comune. Non c'è motivo di accettare la paralisi e la demotivazione, né per noi stessi né per gli altri.

Una delle grandi lezioni della mia avventura è che solo affrontando la nostra sensazione di non capire nulla abbiamo la possibilità di finire per capire.

Sembra che sia proprio questa perplessità a permettere di impegnare al meglio le nostre naturali facoltà di apprendimento.

È proprio qui che la matematica è difficile: ci chiede di guardare a ciò che è al di là di noi, di farlo oggetto del nostro interesse, di immaginarlo e di definirlo con delle parole, senza essere distratti dal nostro senso di inferiorità. E questo anche quando il nostro riflesso istintivo sarebbe di darcela a gambe.

Per Cartesio, solo l'esperienza della matematica ci permette di comprendere veramente cosa significa «capire». Questo è anche ciò che ho imparato personalmente. Mi ha insegnato a prestare sempre attenzione a quello strano sapore in bocca, a quella sensazione che qualcosa non va e che non funziona come dovrebbe. Mi ha insegnato a riconoscere una nuova idea, a prendermene cura e ad ascoltarla per darle la possibilità di crescere. Mi ha insegnato ad ascoltare le mie emozioni.

Ora so che la mia sensibilità e la mia ingenuità sono le mie armi intellettuali piú potenti. Il processo matematico è un processo di integrità e allineamento con sé stessi.

Ho imparato abitudini che mi hanno accompagnato fin da allora. Ho smesso di credere che esistano cose controintuitive per natura. Le cose che ci vengono presentate come «controintuitive» o «paradossali» sono false o spiegate male.

Niente ci costringe a vivere in un mondo indecifrabile e incoerente. Adottando le giuste abitudini, sviluppando la fiducia nella nostra capacità di *immaginare* e di *formalizzare*, possiamo migliorare continuamente la nostra chiarezza mentale.

Se insegniamo la matematica ai nostri figli, non è tanto per parlare di numeri e forme, quanto per dar loro la possibilità di avvicinarsi al mondo in questo modo.

Comprendere è uno dei grandi piaceri della vita. Questo piacere è a volte rovinato dal disappunto e dalla sensazione di aver perso tempo: *come ho fatto a essere cosí stupido da non averlo capito prima?*

Mi sento in questo modo cosí di frequente che ho imparato a non farci piú caso. Il momento migliore per piantare un albero era vent'anni fa, il secondo momento migliore è adesso.

Se pensavate di essere negati in matematica e questo libro vi ha fatto venire voglia di riprovarci, tenetelo a mente: ci sono alcune storie molto belle sulla conquista dell'Himalaya che sono facili da leggere, ma non c'è niente che possa sostituire la pratica. Per i principianti, i primi metri sulla parete d'arrampicata possono già essere molto impegnativi.

Il mio consiglio è di non vergognarvi di iniziare dal basso, con dimostrazioni classiche ed elementari. Poiché vi sarà difficile sapere se le avete davvero capiti, provate a spiegarle a qualcun altro, per esempio a un bambino.

Quando cerchiamo di spiegarle agli altri, spesso ci accorgiamo che le nostre idee e il nostro linguaggio non sono ancora abbastanza chiari. È una sensazione sgradevole e umiliante, che possiamo superare, ed è cosí che facciamo progressi.

Il mio unico modo di capire le cose è spiegarle a me stesso nei termini piú semplici possibili, come se fossi un bambino. È lo stesso principio che ho usato per scrivere questo libro.

Mi piace molto la definizione di Thurston: «I matematici sono gli esseri umani che fanno progredire la comprensione umana della matematica».

È esattamente quello che ho cercato di fare.

Note
Per andare oltre

1. Tre segreti

1. «Non ho doni particolari, sono solo appassionatamente curioso»: la citazione originale, «Ich habe keine besondere Begabung, sondern bin nur leidenschaftlich neugierig», è tratta da una lettera di Einstein al suo biografo Carl Seelig dell'11 marzo 1952.

2. «Non si preoccupi delle sue difficoltà in matematica, le posso assicurare che le mie sono di gran lunga peggiori»: da una lettera di Einstein del 7 gennaio 1943 alla studentessa Barbara Wilson.

3. «Credo nelle intuizioni e nelle ispirazioni»: da un'intervista con George Sylvester Viereck nel *Saturday Evening Post*, 26 ottobre 1929. Molte delle citazioni di Einstein che si trovano in giro sono false o distorte. Quelle che riporto in questo libro sono state verificate su *The Ultimate Quotable Einstein*, una raccolta di citazioni a cura di Alice Calaprice (Princeton University Press, Princeton 2011).

4. Riguardo alla notazione 99.9999%: in questo libro ho scelto di usare il punto (non la virgola) come separatore decimale, secondo l'uso internazionale piú comune. Nella programmazione informatica, questo uso è ormai diventato lo standard.

2. Il lato giusto del cucchiaio

1. La matematica è la materia: piú difficile per il 37% dei 1 028 adolescenti statunitensi intervistati da Gallup in un sondaggio del 2004. Si veda Lydia Saad, *Math Problematic for U.S. Teens*, Gallup, 17 maggio 2005, https://news.gallup.com/poll/16360/math-problematic-us-teens.aspx; piú amata per il 23% degli adolescenti americani, molto piú dell'inglese (13%), secondo un sondaggio Gallup del 2004 su 785 americani dai 13 ai 17 anni. Si veda Heather Mason Kiefer, «Math = Teens, Favorite School Subject», Gallup, 15 giugno 2004, https://news.gallup.com/poll/12007/Math-Teens-Favorite-School-Subject.aspx; piú odiata secondo innumerevoli sondaggi, indipendentemente dalle caratteristiche degli intervistati.

4. La vera magia

1. Il numero 999 999 999 sarebbe stato facile da scrivere nel sistema sessagesimale babilonese inventato quattromila anni fa, molto prima dell'era romana. La spiegazione di questo sistema di numerazione è riportata nel capitolo 2 del libro di Mickaël Launay, *Le grand roman des maths. De la*

préhistoire à nos jours, Flammarion, Paris 2016. Anche se la sua scrittura in numeri romani è complicata, il numero stesso è facilmente calcolabile con un abaco, il tipo di pallottoliere che usavano i romani e il cui funzionamento era implicitamente decimale. È la trascrizione dall'abaco in una scrittura esplicita a essere problematica. Dopo il periodo classico, i numeri romani furono ampliati con simboli che esprimevano il milione, il miliardo ecc. Ma la scrittura di 999 999 999 continua a essere un problema nonostante queste estensioni, perché è necessario mobilitare molti simboli: «9 milioni», da solo, mobilita già nove volte il simbolo del milione.

5. I gesti invisibili

1. Il delfino nella foto è Wave, una delle amiche di Billie. La fotografia è tratta dall'articolo scientifico di M. Bossley, A. Steiner, P. Brakes e altri, «Tail Walking in a Bottlenose Dolphin Community: The Rise and Fall of an Arbitrary Cultural "Fad"», in *Biology Letters*, vol. 14, n. 9, settembre 2018, online: https://www.royal-societypublishing.org/doi/10.1098/rsbl.2018.0314. Questo articolo è facilmente accessibile e fornisce molti dettagli concreti.

2. «Il mio obiettivo non era vincere, ma solo non perdere»: questa dichiarazione di Fosbury è tratta da un'intervista video del 2014 disponibile online: https://www.youtube.com/watch?v=gGqQXDkpgss.

3. «Penso che ora molti ragazzi cercheranno…»: questa frase è citata nell'articolo di Joseph Durso, «Fosbury Flop Is a Gold Medal Smash», in *The New York Times*, 22 ottobre 1968.

6. Il rifiuto di leggere

1. L'articolo di William P. Thurston, «On Proof and Progress in Mathematics», in *Bulletin of the American Mathematical Society*, n. 30, 1994, pp. 161-177, è disponibile online: https://arxiv.org/pdf/math/9404236.pdf.

7. La postura del bambino piccolo

1. La lettera sul «noioso saggio» è contenuta in Alexander Grothendieck e Jean-Pierre Serre, *Correspondance Grothendieck-Serre*, a cura di Pierre Colmez e Jean-Pierre Serre, Société mathématique de France, Paris 2001.

2. Le citazioni di Serre sono tratte dall'affascinante intervista che ha rilasciato ad Alain Connes (anch'egli matematico di spicco, medaglia Fields nel 1982), presso la Fondation Hugot del Collège de France il 27 novembre 2018. Questo eccezionale resoconto delle personalità di Grothendieck e Serre è disponibile online: https://www.youtube.com/watch?v=pOv-ygSynRI.

3. Una buona introduzione alla biografia di Grothendieck è l'articolo, in due parti, di Allyn Jackson, «As if Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck», in *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 50, n. 4, pp. 1038-1056, e vol. 51, n. 10, pp. 1196-1212, online: https://www.ams.org/notices/200409/fea-grothendieck-part1.pdf e https://www.ams.org/notices/200410/fea-grothendieck-part2.pdf.

4. Gli estratti da *Récoltes et semailles* (sottotitolato *Réflexions et témoignage d'un passé de mathématicien*) sono tratti dalla versione in tre volumi pubblicata da Gallimard nella collana «Tel» solo a gennaio del 2022. Negli anni Ottanta, Grothendieck si aspettava la pubblicazione dell'opera dall'editore Christian Bourgois e ha scritto persino una prefazione. Ma non è mai andata in stampa.

5. La natura ermetica del testo non basta a spiegare perché un'opera di tale importanza sia rimasta inedita per cosí tanto tempo. Una spiegazione piú ovvia è la natura problematica delle accuse infondate mosse da Grothendieck. In particolare, accusa i suoi studenti di aver abbandonato il suo lavoro, un'accusa assurda (si veda la risposta molto precisa di Serre a Grothendieck nella lettera del 23 luglio 1985). Altre accuse, molto piú violente, avrebbero esposto l'editore a probabili cause per diffamazione. Negli anni Duemila, un collettivo chiamato The Grothendieck Circle ha lavorato per pubblicare e rendere di libero accesso molti testi e documenti inediti, tra i quali *Récoltes et semailles*, ma anche *La clef des songes*, un altro testo tanto notevole quanto ermetico. Questo sforzo è stato interrotto dopo che Grothendieck ha rilasciato una «dichiarazione di intenti di non pubblicazione», datata 3 gennaio 2010, in cui afferma, tra le altre cose, che: «Non ho intenzione di pubblicare o ripubblicare alcun lavoro o testo di cui sono l'autore, in qualsiasi forma. […] Qualsiasi pubblicazione o distribuzione di tali testi che sia stata fatta in passato senza il mio consenso, o che sarà fatta in futuro e durante la mia vita, contro la mia espressa volontà qui specificata, è per me illecita». Un mese dopo, il 3 febbraio 2010, Grothendieck ha ribadito comunque l'importanza di *Récoltes et semailles* in una lettera al matematico Frans Oort, citata nell'articolo di Ching-Li Chai e Frans Oort, «Life and Work of Alexander Grothendieck», in *Notice ICCM*, vol. 5, n. 1, 2017, pp. 22-50. La lettera contiene questa citazione: «Questa riflessione e questa testimonianza sulla mia vita di matematico, per quanto illeggibile, lo ammetto, ha un grande significato per me».

8. La teoria del tatto

1. Le pagine che descrivono la teoria del tatto in termini di punte e vuoti sembrano un vero e proprio testo di ricerca matematica. Se vi è piaciuta questa parte, dovreste apprezzare anche la matematica ufficiale.

9. Qualcosa che non va

1. Nella dimensione 3, esistono cinque strutture di poliedri convessi regolari (cioè tutti identici e regolari): il tetraedro (4 facce), il cubo (6 facce), l'ottaedro (8 facce), il dodecaedro (12 facce) e l'icosaedro (20 facce). La cosa è nota da migliaia di anni. Questi cinque poliedri compaiono in uno dei dialoghi di Platone, il *Timeo*. Anche se Platone stava semplicemente riportando conoscenze precedenti, questi poliedri sono stati da allora definiti «solidi platonici». La nozione di poliedro regolare viene generalizzata in qualsiasi dimensione: si parla allora di «politopi» regolari. La classificazione dei politopi regolari in qualsiasi dimensione è nota fin dai lavori del matematico svizzero Ludwig Schläfli (1814-1895). Questi oggetti sono anche al centro dell'opera del grande studioso di geometria canadese H.S.M. Coxeter (1907-2003). La classificazione rivela un fenomeno molto particolare nella dimensione 8, con un oggetto eccezionale e notevole chiamato «E8», che ritroveremo piú avanti nelle note al capitolo 15.

2. Nell'ordinamento scolastico francese, le classi preparatorie aiutano gli studenti a sostenere gli esami d'accesso ad alcune facoltà universitarie, perlopiú alle Grandes écoles, alle Écoles normales supérieures e al Politecnico (*N.d.T.*).

3. Le citazioni di Pierre Deligne sono tratte da una conversazione con due matematici, Martin Raussen e Christian Skau, disponibile online: https://www.youtube.com/watch?v=MkNf00Ut2TQ. La sua trascrizione, pubblicata nelle *Notices of the American Mathematical Society* nel 2014, è accessibile qui: https://www.ams.org/notices/201402/rnoti-p177.pdf.

4. «È piú bravo di me»: questa affermazione di Grothendieck su Deligne è tratta da una conversazione con George Mostow (1923-2017), riferitami da lui stesso in un colloquio privato.

10. Imparare a vedere

1. L'infanzia di Bill Thurston è stata raccontata nell'articolo di David Gabai e Steve Kerckhoff (a cura di), «William P. Thurston, 1946-2012», in *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 62, n. 11, dicembre 2015, pp. 1318-1332, e vol. 63, n. 1, gennaio 2016, pp. 31-41, online: http://www.ams.org/notices/201511/rnoti-p1318.pdf e https://www.ams.org/notices/201601/rnoti-p31.pdf.

2. Per quanto riguarda l'intuizione geometrica di Thurston, consiglio vivamente il film d'animazione *Outside In*, adattamento di una delle sue dimostrazioni e prodotto dal Geometry Center dell'Università del Minnesota, nonché le «Landau Lectures», una serie di conferenze tenute da Thurston nel 1996 all'Università Ebraica di Gerusalemme. Tutti questi contenuti video sono liberamente disponibili online.

3. A proposito del daltonismo: la frequenza dell'8% negli uomini è una stima per la popolazione del Nord Europa (fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Color_blindness). Si tratta di un difetto di codifica che impedisce l'espressione di una proteina, quindi di una mutazione recessiva. Il gene è trasportato sul cromosoma X, il che spiega perché la frequenza nelle donne è il quadrato della frequenza negli uomini.

4. L'articolo originale di Dalton, «Extraordinary Facts Relating to the Vision of Colours», pubblicato nel 1798, afferma che la comunicazione è stata fatta il 31 ottobre 1794. L'articolo è ben scritto e rimane perfettamente leggibile anche oggi.

5. «La gente non capisce come io possa visualizzare quattro o cinque dimensioni…»: queste parole di Thurston sono riportate nell'articolo di Leslie Kaufman, «William P. Thurston, Theoretical Mathematician, Dies at 65», in *The New York Times*, 22 agosto 2012.

6. Il documentario *The Boy Who Sees Without Eyes* (2007), diretto da Elliot McCaffrey e disponibile online, offre una panoramica sulle capacità di Ben Underwood. Gli studi sull'ecolocalizzazione umana suggeriscono che nei non vedenti questa capacità impegna le stesse regioni cerebrali che i vedenti utilizzano per elaborare le informazioni visive (fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Human_echolocation).

11. La palla e la mazza

1. Tutte le citazioni di Daniel Kahneman sono tratte da *Pensieri lenti e veloci*, Mondadori, Milano 2012.

12. I trucchi non esistono

1. L'aneddoto su Bill Thurston è riportato nel dossier biografico di Gabai e Kerckhoff (a cura di), «William P. Thurston, 1946-2012», cit.

13. Passare per stupidi

1. La citazione di Pierre Deligne è tratta da una conversazione pubblicata nel 2014, citata nelle note del capitolo 9.

14. Un'arte marziale

1. «Come un elefante o una pantera…»: le citazioni del terzo paragrafo sono tratte da una lettera di Cartesio a Pierre Chanut del 31 marzo 1649. Chanut non era solo l'ambasciatore francese in Svezia, ma anche un amico intimo di Cartesio.

2. Il resoconto di Cartesio dei suoi tre sogni era contenuto in un testo ormai perduto, *Olympica*, noto solo attraverso la trascrizione fatta da Adrien Baillet (1649-1706), il suo primo biografo, in *La vie de Monsieur Descartes* (1691). Baillet aveva accesso a molti documenti originali e a testimoni diretti, e il suo testo rimane l'unico riferimento per molti aspetti della vita e dell'opera di Cartesio. Le citazioni sulla notte tra il 10 e l'11 novembre 1619, cosí come la descrizione dell'*Arte della scherma*, sono tratte dal libro di Baillet. C'è anche questa frase che riprende il tema del capitolo 6: «Bisogna però ammettere che non leggeva molto, che possedeva pochissimi libri e che la maggior parte di quelli trovati nel suo inventario dopo la morte erano regali degli amici».

3. Il testo originale delle *Regole per la guida dell'intelligenza* è in latino (*Regulae at directionem ingenii*). Per rendere il testo più fluido, ho leggermente modernizzato le traduzioni degli estratti citati rispetto alle traduzioni classiche che sono spesso utilizzate come riferimento.

15. Zero paura

1. Gli aneddoti su Cantor sono tratti da https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor.

2. Sulle dimensioni dell'infinito, si veda anche l'episodio «Sur la route de l'infini» (2020) della serie divulgativa e molto accessibile *Voyages au pays des maths*, diretta da Denis Van Waerebeke e trasmessa da Arte.

3. Un'eccellente lettura complementare a questa sezione sui nodi è l'articolo di Thibault Godin e Hoel Queffelec, «Une famille infinie de nœuds», Images des mathématiques, Cnrs, 2020, online: http://images.math.cnrs.fr/Une-famille-infinie-de-noeuds.html. Ospitato dal Cnrs, il sito Images des mathématiques è una delle migliori fonti di divulgazione matematica in francese.

4. A grandi linee (per maggiori dettagli, si veda l'articolo di Godin e Queffelec), il ragionamento è il seguente: per dimostrare che due nodi sono diversi, la strategia consiste nell'individuare un «invariante» che li differenzi. Un invariante di un nodo è una caratteristica comune a tutti i suoi disegni, per quanto complicati. Ecco un esempio di invariante. Un disegno di nodo si dice «tricolore» se i «pezzi» del disegno (intendendo i pezzi visibili del disegno, come se il filo che passa sotto un'intersezione fosse tagliato a metà) possono essere colorati con tre colori diversi, uno per pezzo, e rispettando la seguente regola: a ogni intersezione, i tre pezzi coinvolti nell'intersezione (quello «sopra» e i due «sotto») sono di tre colori diversi o dello stesso colore. Anche se a prima vista non è evidente, si può dimostrare che si tratta di un invariante: il fatto che un nodo sia tricolore non dipende dal disegno scelto. Per dimostrarlo, ci basiamo sul fatto che due disegni rappresentano lo stesso nodo se e solo se possiamo passare dal primo disegno al secondo con una successione di trasformazioni elementari, chiamate *mosse di Reidemeister*, e dimostriamo che queste mosse di Reidemeister preservano la tricolorabilità. Ad esempio, il nodo a trifoglio è tricolore (si veda sotto), mentre il nodo banale non lo è (ha un solo pezzo e quindi non si possono usare tre colori diversi).

Se il nodo a trifoglio fosse uguale al nodo banale, sarebbero entrambi tricolori o nessuno dei due lo sarebbe. Pertanto, mostrando un invariante che li differenzia, si è dimostrato che questi due nodi sono distinti. Anche se questo dimostra il risultato, la definizione di tricolorabilità sembra arbitraria quanto il famoso «trucco» per calcolare la somma dei numeri interi da 1 a 100. Come sempre, questo apparente «trucco» è un segnale che indica un modo piú profondo di comprendere ciò che sta accadendo. Purtroppo, non sono in grado di spiegarlo in modo semplice. Richiede un tipo di intuizione che è difficile da esprimere in poche parole. Per quanto riguarda i disegni complicati del nodo banale, si veda la conversazione «Are There any Very Hard Unknots?» lanciata sul sito MathOverflow da Timothy Gowers, medaglia Fields 1998: https://mathoverflow.net/questions/53471/are-there-any-very-hard-unknots. Il disegno «complicato» del nodo banale presentato nel capitolo è chiamato «nodo gordiano». È opera di Wolfgang Haken, matematico tedesco nato nel 1928, famoso per aver dimostrato il celebre «teorema dei quattro colori» con Kenneth Appel. Un breve video su YouTube intitolato «Haken's Gordian Knot Animation» illustra perché questo disegno rappresenta il nodo banale (https://www.youtube.com/watch?v=hznI5HXpPfE).

5. A proposito della congettura di Keplero: sebbene la prova di Tom Hales comporti una quantità fenomenale di calcoli al computer, ha anche una parte «concettuale» profonda e originale. Non è affatto ovvio a priori che la congettura possa essere ridotta a un numero finito di calcoli e che questi calcoli possano in pratica essere eseguiti su un computer. Le dimostrazioni assistite da un computer sono talvolta oggetto di dibattito nella comunità matematica: se nessun essere umano fosse in grado di leggerle e comprenderle, dovremmo davvero considerarle dimostrazioni? E come possiamo essere sicuri che il codice informatico non contenga errori? Dopo la prima dimostrazione, Tom Hales ha lanciato un ambizioso progetto per costruire una prova «formale», una dimostrazione informatica che verifichi la propria validità. Questo approccio ha avuto successo ed è spiegato in un articolo di ricerca intitolato «Formalizing the Proof of the Kepler Conjecture», disponibile online (https://www.youtube.com/watch?v=DJx8bFQbHsA). Il discorso tenuto da Hales nel 2014 a Parigi (presso l'Institut Henri Poincaré) non è destinato al grande pubblico, ma illustra quale può essere la realtà «viva» della ricerca contemporanea.

6. Il termine proprio nel linguaggio matematico italiano è «impacchettamento» di sfere (*N.d.T.*).

7. La possibilità di determinare le pile di sfere piú dense nelle dimensioni 8 e 24 si spiega con l'esistenza di strutture geometriche eccezionali, specifiche di queste dimensioni, che danno origine a pile notevolmente dense. I metodi utilizzati da Maryna Viazovska sono specifici per queste dimensioni. In dimensione 8, la struttura eccezionale è la geometria di tipo E8 (si vedano le note del capitolo 9 sulla classificazione dei politopi). Nella pila di sfere associata, il numero di contatti tra

sfere vicine (il cosiddetto *kissing number*) è 240. Nella dimensione 24, la geometria della pila è quella del «reticolo di Leech», una struttura eccezionale specifica della dimensione 24 (https://en.wikipedia.org/wiki/Leech_lattice). Si noti che il *kissing number*, 196 560, evoca la dimensione 196 883 menzionata nel capitolo 20 e associata al «Mostro». Non è una coincidenza. I matematici sanno che queste stranezze «numerologiche» sono spesso segni di connessioni molto piú profonde. Il Mostro, uno degli oggetti matematici piú intriganti, è in relazione con molte altre strutture eccezionali (si veda in particolare la teoria del «mostruoso chiaro di luna», https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine).

17. Controllare l'universo

1. La prima citazione (senz'altro falsa) attribuita a Grisha Perel'man («Cosa me ne farei di un milione di dollari, visto che posso già controllare l'universo?») è stata riportata da un «giornalista e produttore» che affermava di essere vicino a Perel'man e che stava preparando un documentario su di lui, ed è stata diffusa dal tabloid russo *Komsomol'skaia Pravda*. Il documentario non è mai stato realizzato e la fonte è dubbia. La seconda citazione di Perel'man («Non mi interessano i soldi o la fama») è tratta dall'articolo «Russian Maths Genius Perelman Urged to Take $1m Prize», in *Bbc News*, 24 marzo 2010, online: http://news.bbc.co.uk/2/hi/europe/8585407.stm.

2. Per quanto riguarda Unabomber, le fonti principali, oltre alla completissima pagina di Wikipedia in inglese, sono elencate di seguito: 1. Sull'infanzia di Ted Kaczynski: l'intervista al fratello David Kaczynski, https://www.youtube.com/watch?v=U2MAe8N2Dv4. 2. Sugli estratti del diario: David Johnston, «In Unabomber's Own Words, A Chilling Account of Murder», in *The New York Times*, 29 aprile 1998. 3. Sull'attentato al volo American Airlines 444: Stephen J. Lynton e Mike Sager, «Bomb Jolts Jet», in *The Washington Post*, 16 novembre 1979. 4. «Manifesto di Unabomber»: disponibile online, ad esempio, sul sito del *Washington Post*: https://www.washingtonpost.com/wp-srv/national/longterm/unabomber/manifesto.text.htm. 5. Sui dettagli degli attentati e dell'indagine: conferenza stampa tenuta il 19 novembre 2014 presso la Corte distrettuale di Sacramento, California, ripresa e trasmessa da C-Span: https://www.c-span.org/video/?322849-1/unabomber-investigation-trial. 6. Il ruolo di Bill Thurston nell'indagine è rivelato da Steven G. Krantz in *Mathematical Apocrypha. Stories and Anecdotes of Mathematicians and the Mathematical*, The Mathematical Association of America, Washington DC, 2002.

3. La discussione tra Bill Thurston e Muad è disponibile qui: https://mathoverflow.net/questions/43690/whats-a-mathematician-to-do. Si noti questo commento aggiunto da Thurston: «Cerco di scrivere ciò che mi sembra reale. Ormai non temo piú di essere giudicato, e questo mi rende tutto piú facile», riprende il tema dell'epilogo: per osare raccontare l'esperienza umana della comprensione, i matematici devono superare la reticenza della loro comunità ad affrontare questo argomento «non serio».

18. L'elefante nella stanza

1. Il «problema delle specie», cioè l'impossibilità di definire in modo rigoroso cosa sia una specie animale, è un problema epistemologico ben noto e ampiamente discusso.

2. Altri problemi classici che illustrano la fragilità del linguaggio umano sono il «paradosso del mucchio» (noto anche come «paradosso del sorite», dal greco *sorōs* che significa «mucchio»): se si toglie un granello da un mucchio di sabbia, è ancora un mucchio di sabbia; ma se si continua, a un certo punto non è piú un mucchio di sabbia. A che punto è il limite? Questo problema, come il «paradosso del calvo» (se si strappa un capello a un uomo che non è calvo, non lo si rende calvo; ma

poi, si può davvero definire il confine tra essere calvi e non esserlo?), è generalmente attribuito a Eubulide, filosofo greco del IV secolo a.C.

3. Le citazioni di Ludwig Wittgenstein sono tratte dai paragrafi 106 e 107 di *Ricerche filosofiche* (Einaudi, Torino 2021), un testo completato intorno al 1949 e pubblicato postumo nel 1953. Nella prima parte della sua vita, tuttavia, Wittgenstein sembrava vicino alle posizioni logiciste di Bertrand Russell (si veda il mio Epilogo), in contrasto con le preoccupazioni delle *Ricerche filosofiche*. Le opere tarde di Wittgenstein sono un eccellente complemento a questo capitolo e al capitolo 19. Forse la piú accessibile è *Della certezza* (Einaudi, Torino 1999), una breve raccolta di appunti pubblicata postuma nel 1969.

19. Astratto e malleabile

1. La questione dell'origine dei concetti astratti è nota in filosofia come «problema degli universali». La posizione «realista» sostiene che i concetti sono cose «reali», cioè che esistono indipendentemente dall'occhio umano. Il «nominalismo» (e la sua variante «concettualista») ritiene che siano convenzioni del linguaggio (o cose che esistono nella nostra testa). Storicamente, la posizione realista è stata a lungo dominante. In Europa, nel Medioevo, la questione è stata oggetto di un vivace dibattito noto come «disputa sugli universali», alimentato in particolare dalle posizioni concettuali nominaliste di Pietro Abelardo (1079-1142) e Guglielmo di Ockham (1285-1347), le cui tesi furono condannate dalla Chiesa. In un certo senso, il *deep learning* ha finalmente dato loro ragione.

2. Per quanto riguarda la specializzazione dei neuroni, un famoso articolo di *Nature* descrive la dimostrazione sperimentale di un «neurone Jennifer Aniston», che reagisce in modo specifico alla presenza dell'attrice in un'immagine. Si veda R. Quian Quiroga, L. Reddy, G. Kreiman e altri, «Invariant Visual Representation by Single Neurons in the Human Brain», in *Nature*, n. 435, 2005, pp. 1102-1107.

3. Il corso di introduzione al *deep learning* del Massachusetts Institute of Technology («Mit 6.S191, Introduction to Deep Learning») è liberamente disponibile online.

20. Il risveglio matematico

1. Le due citazioni di Bill Thurston sono tratte dalla sua prefazione a *The Best Writing on Mathematics 2010*, a cura di Mircea Pitici, Princeton University Press, Princeton 2011.

2. La citazione di Grothendieck è tratta da *Récoltes et semailles*.

3. L'articolo di Bob Thomason e Tom Trobaugh è «Higher Algebraic K-Theory of Schemes and of Derived Categories», in *The Grothendieck Festschrift*, vol. III, Boston, Birkhäuser, Boston 1990, pp. 247-429.

Epilogo

1. Nella sua prima lettera a G.H. Hardy del 16 gennaio 1913, Srinivasa Ramanujan dichiara di avere ventitré anni. Nato nel dicembre del 1887, aveva allora venticinque anni. Non ho trovato una spiegazione per questa incongruenza.

2. Fu a Hardy che Russell raccontò di aver avuto il seguente incubo: in un futuro lontano, è rimasta una sola copia dei *Principia Mathematica*, conservata in una grande biblioteca universitaria. Un impiegato della biblioteca setaccia gli scaffali alla ricerca di libri non piú necessari e li distrugge per fare spazio. L'impiegato afferra l'ultima copia dei *Principia Mathematica* ed esita. Oltre alla sua

inumanità, il progetto formalista sotteso ai *Principia Mathematica* è problematico anche dal punto di vista logico. Kurt Gödel (1906-1978) ha dimostrato con il suo famoso teorema di incompletezza che i sistemi formali come quello dei *Principia Mathematica* contengono sempre affermazioni «indecidibili», cioè affermazioni non dimostrabili e la cui negazione non è a sua volta dimostrabile. Si veda anche Alfred North Whitehead e Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge 1910.

3. La recensione di Hardy dei *Principia Mathematica* si intitola «The New Symbolic Logic». Apparsa sul *Times Literary Supplement* del 7 settembre 1911, inizia cosí: «Forse venti o trenta persone in Inghilterra leggeranno questo libro».

4. Nel primo anno all'École normale supérieure, la mia lezione preferita era quella di Xavier Viennot, che ci insegnava a «calcolare» con oggetti «intuitivi» (simili a pezzi di Lego o di Tetris) grazie ai quali era possibile trovare «visivamente evidenti» alcuni risultati di Ramanujan. Questo straordinario insegnamento fu di grande ispirazione e mi aiutò a capire come formule esoteriche come quelle di Ramanujan potessero codificare intuizioni non verbali semplici e sottili. Una buona introduzione a questo approccio è la conferenza «Proofs Without Words: The Example of Ramanujan Continued Fractions», tenuta da Viennot a Chennai, l'antica Madras, nel 2019. Le note (http://www.xavierviennot.org/coursIMSc2017/lectures_files/RamanujanInst_2017.pdf) e la registrazione video (https://www.youtube.com/watch?v=jQchTFnKBQs) sono disponibili online.

5. Misha Gromov, «Math Currents in the Brain», in R. Kossak e P. Ording (a cura di), *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts*, Springer, Cham 2017.

6. G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (1940), Cambridge University Press, Cambridge 1992 (trad. it. *Apologia di un matematico*, Milano, Rcs, 2018).

Ringraziamenti

Il mio primo ringraziamento va a Hélène François, la mia prima lettrice, per la sua generosità, il suo coraggio e il suo spirito visionario. Questo libro le deve molto.

Farouk Boucekkine, Michel Broué, Nicolas Cohen, Hélène Devynck, Marion Gouget, Basile Panurgias e Jérôme Soubiran mi hanno accompagnato e consigliato durante tutto il processo di scrittura. Devo molto anche a loro.

Vorrei ringraziare Mireille Paolini, la mia editor, per la sua superlucidità, la sua fiducia e la sua determinazione, nonché l'intero team delle Éditions du Seuil: Adrien Bosc, Hugues Jallon e Séverine Nikel, per il loro entusiasmo; Emmanuelle Bigot, Muriel Brami, Bénédicte Gerber, Joséphine Gross e Virginie Perrollaz, per il loro impegno. Ringrazio Éléonore Lamoglia per la cura delle illustrazioni.

Grazie ad Ardavan Beigui, Fabrice Bertrand, Simon Boissinot, Emmanuel Breuillard, Olivia Custer, Lucas Dernov, Maxime Dernov, Nicolas François, Artem Kozhevnikov, Vincent Levy, François Loeser, Raphaël Rouquier, Vincent Schächter, Claudia Senik, Marguerite Soubiran, Sarah Stern, Solal Stern, Maxime Verner, Agathe Vernin, che con le loro letture e i loro commenti hanno reso questo libro decisamente migliore.

Per il loro aiuto nella documentazione, ringrazio Sophie Kucoyanis e le Éditions Gallimard (citazioni di Grothendieck), Steve Krantz e Mike Bossley.

Ringrazio il team di Tinyclues per la fiducia e l'impegno.

Ringrazio tutti coloro che mi hanno insegnato a pensare.

Crediti delle illustrazioni

Fotografie

© Università di St Andrews / Dr Mike Bossley: 44
© Tony Duffy / Allsport: 45
Pittsburgh Quarterly © David Schrott Jr: 188
© Maryna Viazovska: 190
Archivio del Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach: 209 a sinistra
Pubblico dominio: 209 a destra, 266
Diritti riservati: 56, 64, 68, 106, 113, 165

Altre illustrazioni

Wikimedia Commons / adattato da Nicolas Rougier «Neuron Figure.png»: licenza Creative Commons attribuzione-condividi allo stesso modo 4.0 internazionale, https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fr: 239

Wikisource / The University of Michigan Historical Mathematics Collection / pagina scansionata da Bertrand Russell e Alfred North Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge 1910: Creative Commons attribuzione-condividi allo stesso modo 4.0 internazionale: 268

Disegni di Éléonore Lamoglia.

Se vi è piaciuto *Mathematica - Un'avventura alla ricerca di noi stessi* di David Bessis,

vi consigliamo di non perdere

Aurélie Jean

Facebook Neri Pozza

https://neripozza.it/

NERI POZZA EDITORE

1. Copertina
2. Collana
3. Frontespizio
4. Colophon
5. Sommario
6. 1. Tre segreti
7. 2. Il lato giusto del cucchiaio
8. 3. Con la forza del pensiero
9. 4. La vera magia
10. 5. I gesti invisibili
11. 6. Il rifiuto di leggere
12. 7. La postura del bambino piccolo
13. 8. La teoria del tatto
14. 9. Qualcosa che non va
15. 10. Imparare a vedere
16. 11. La palla e la mazza
17. 12. I trucchi non esistono
18. 13. Passare per stupidi
19. 14. Un’arte marziale
20. 15. Zero paura
21. 16. Iperlucido
22. 17. Controllare l’universo
23. 18. L’elefante nella stanza
24. 19. Astratto e malleabile
25. 20. Il risveglio matematico
26. Epilogo
27. Note. Per andare oltre
28. Ringraziamenti
29. Crediti delle illustrazioni
30. Scopri l'autrice